

Simetrik Jeodezik Koordinat Dönüşümü: 3 Boyutlu Benzerlik Dönüşümü Örnekleri Üzerinden Bir İrdeleme

Süreyya Özgür Uygur^{1,*}, Cüneyt Aydın¹, Orhan Akyılmaz²

¹Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, 34220 İstanbul

²İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, Geomatik Mühendisliği Bölümü, 34469 İstanbul

Özet

3 boyutlu benzerlik dönüşümü jeodezi, fotogrametri, coğrafi bilgi sistemleri vb. alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır. 7 parametrelili benzerlik dönüşümü olarak da adlandırılan bu problemin çözümü için kullanılan en genel yaklaşım, yalnızca hedef sistem koordinatlarının hatalı kabul edildiği klasik en küçük kareler (EKK) çözümüdür. Bununla beraber, başlangıç sistemi koordinatlarının hatalarının ihmal edilmesi yanıltıcı sonuçlar elde edilmesine neden olabilmektedir. Bu sebeple, dönüşüm parametrelerinin belirlenmesi için her iki sisteme ilişkin koordinat hatalarının da göz önünde bulundurulduğu toplam EKK çözümü, diğer bir deyişle simetrik koordinat dönüşümü çözümü önerilmektedir. Her iki sistem koordinatlarının özdeş kovaryans matrislerine sahip olduğu, sınırlı sayıda örnek ile gerçekleştirilen jeodezik koordinat dönüşümü çalışmalarında; simetrik ve klasik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen parametre ve standart sapmaları arasındaki farklar oldukça küçüktür. Dolayısı ile getirdiği hesap yükü de göz önünde bulundurulduğunda, koordinat dönüşümü probleminin simetrik olarak ele alınmasına gerek olmadığı izlenimi edinilebilir. Ancak bu izlenim bazı özel durumlar dışında gerçeği yansıtmamaktadır. Çalışmada simetrik koordinat dönüşümünün jeodezik çalışmalara katkısı irdelenmiştir. Bu kapsamda 7 parametrelili benzerlik dönüşümünün hem simetrik hem de klasik koordinat dönüşümü olarak ele alındığı bir simülasyon çalışması tasarlanmıştır. Her iki dönüşümün performansı parametre standart sapmaları ve konum hatası üzerinden oldukça geniş örnekleme test edilmiştir. Elde edilen bulgular göstermektedir ki, simetrik koordinat dönüşümü yeni noktaların prediksyonunda daha başarılı sonuçlar vermektedir. Ayrıca başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarına göre 10 kat veya daha fazla doğru olması durumunda, başlangıç sistemi hatalarının göz ardı edilmesinin kestirim sonuçlarına etki etmediği görülmektedir.

Anahtar Sözcükler: Simetrik Koordinat Dönüşümü, Toplam En Küçük Kareler, Konum Hatası, Benzerlik Dönüşümü

Abstract

3 dimensional similarity transformation is frequently used in the fields of geodesy, photogrammetry, geographic information systems, etc. For the solution of the problem which is also called 7-parameter similarity transformation, the common approach used is the classical least-squares (LS) solution in which only the target system coordinates are considered erroneous. However, ignoring the errors of start system coordinates may cause misleading results. Therefore, in order to determine the transformation parameters, the symmetric coordinate transformation using total least-squares (TLS) solution, which takes into account the coordinate errors of both systems, is proposed. In geodetic coordinate transformation studies performed with limited number of samples, where both system coordinates have identical covariance matrices, the differences between the parameters and their standard deviations obtained as a result of symmetric and classical coordinate transformations are quite small. Therefore, considering its computational burden, one may have the impression that it is unnecessary to treat the coordinate transformation problem as a symmetric one. However, except for some special cases, this impression does not reflect the reality. In this study, the contribution of symmetric coordinate transformation to the geodetic studies has been discussed. In this context, a simulation study in which 7-parameter similarity transformation is handled as both symmetric and classical coordinate transformations, has been designed. The performance of both transformations has been tested on a very large sample through the parameter standard deviations and positioning errors. Our findings show that the symmetric coordinate transformation gives better results in the predictions of new points. Also, it is seen that if the start system coordinates are at least ten times more accurate than the target system coordinates, neglecting the start system coordinate errors does not affect the estimation results.

Keywords: Symmetric Coordinate Transformation, Total Least-Squares, Positioning Error, Similarity Transformation

1. Giriş

Üç boyutlu (3B) benzerlik dönüşümü modeli birçok bilimsel alanda ve mühendislik çalışmasında kullanılmaktadır. Jeodezide 7-parametrelili (7p) dönüşüm ya da Helmert dönüşümü olarak da adlandırılan bu dönüşüm modelinde iki sistem arasındaki matematiksel ilişki; x, y, z koordinat eksenleri boyunca üç öteleme, üç dönüklük ve özdeş bir ölçek parametresi ile tanımlanır. Bu parametrelerin belirlenebilmesi için koordinatları her iki sistemde de belli olan eşlenik noktalara ihtiyaç duyulur. Bu eşlenik noktaların koordinat hatalarına bağlı olarak dönüşüm problemi; yalnızca hedef sistem koordinatlarının hatalı olduğu asimetrik dönüşüm modeli ya da her iki sistem koordinatlarının da hatalı olduğu simetrik dönüşüm modeli (Teunissen 1985) altında ele alınabilir.

Koordinat dönüşümü probleminin çözümü için klasik yaklaşım (ağırlıklı) En Küçük Kareler (EKK) dengelemesidir. Bu yaklaşımda başlangıç sistemi koordinatlarına ilişkin hatalar dikkate alınmaz. Ancak gerçekte her iki sisteme ilişkin

* Sorumlu Yazar: Tel: (0212)3835310 E-posta: ozguruygurjfm@gmail.com

koordinatlar da hatalı olabilir. Bu hataların ihmal edilmesi bazı özel durumlar dışında yanıltıcı sonuçlar elde edilmesine, diğer bir deyişle kestirilen parametrelerin “bias”lı olmasına neden olur.

Simetrik koordinat dönüşümü katsayıların da hatalı olduğu dengeleme modeli (Erros-in-Variables – EIV model) altında ele alınır. EIV modelinin çözümü (ağırlıklı) toplam EKK yöntemi ile gerçekleştirilir (Golub ve van Loan, 1980). Toplam EKK çözümünün Akyılmaz (2007) tarafından koordinat dönüşümü problemine uyarlanması ve Schaffrin ve Wieser (2008) tarafından problemin ağırlıklı toplam EKK çözümü olarak yeniden ele alınması sonucu konu ile ilgili çok sayıda çalışma ortaya çıkmıştır (Amiri-Simkooei and Jazaeri 2012, Shen 2011, Snow 2012, Tong vd. 2011, vd.). Schaffrin ve Wieser (2008) tarafından verilen çözüm Lagrange hedef fonksiyonundan elde edilen Euler koşul denklemlerinin iteratif çözümüne dayanmaktadır (Aydın vd. 2014). Diğer yandan Nietzel (2010) tarafından EIV modelin çözümü doğrusal olmayan Gauss-Helmert modeli altında ele alınmış ve problemin iteratif EKK yoluyla çözümü gösterilmiştir. Ek bir çabaya gerek duymadan koordinat kofaktör matrislerinin doğrudan kullanılabilmesi ve çözümün EKK yöntemine göre gerçekleştirilmesi sebebiyle simetrik koordinat dönüşümünü doğrusal olmayan Gauss-Helmert modeli altında ele almak oldukça avantajlıdır (bkz. Aydın 2016, Aydın vd. 2018, Mercan vd. 2018, Uygur vd. 2020).

Jeodezik çalışmaların büyük çoğunluğunda dönüklük açılarının diferansiyel büyüklükler ve ölçek parametresinin bire yakın olduğu doğrusal bir (asimetrik) dönüşüm modeli öngörülür. Bununla beraber, böylesi bir model genel durumu ifade etmez. Dönüklük açılarının büyük olduğu (doğrusal olmayan) dönüşüm problemlerinde iteratif çözüm için parametrelerin yaklaşık değerlerini belirlemek, dönüklük matrisinin yapısı nedeniyle her zaman mümkün olmayabilir. Bu nedenle koordinat dönüşümü problemi için dönüklük matrisinin farklı bir şekilde ele alındığı, daha genel bir çözüme ihtiyaç duyulur. Bu amaçla Mercan vd. (2018) tarafından 3B (a) simetrik benzerlik dönüşümü için, dönüklüklerin birim kuaterniyonlar cinsinden ifade edildiği çözüm önerilmiştir. Dönüşüm parametrelerinin büyük ya da küçük olmasından bağımsız olarak oldukça iyi sonuçlar veren bu kuaterniyon tabanlı çözümün, 3B benzerlik dönüşümü için en genel çözüm olduğu söylenebilir.

2. Kuaterniyon Tabanlı Üç Boyutlu Simetrik Benzerlik Dönüşümü

n sayıda nokta için 3B simetrik benzerlik dönüşümüne ilişkin başlangıç ($\mathbf{X}_1$) ve hedef ($\mathbf{X}_2$) sistemleri arasındaki matematiksel ilişki, koordinat rasgele hataları $\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_1)$ ve $\mathbf{e}_2 \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_2)$ göz önünde bulundurularak

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{U}\mathbf{t} + \mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_1) \quad (1)$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{t}$, $3n \times 1$ boyutlu öteleme vektörünü; $\mathbf{U}$, elemanları 3×3 boyutlu ($\mathbf{I}_3$) birim matristen oluşan $3n \times 3$ boyutlu bir matrisi; $\mathbf{H}$, köşegen elemanları ölçekli dönüklük matrisinden ($\mathbf{R}_\mu$) oluşan $3n \times 3n$ boyutlu blok-köşegen matrisi belirtmektedir. Kuaterniyon tabanlı 3B benzerlik dönüşümü için $\mathbf{R}_\mu$ ölçekli dönüklük matrisi $\mu = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ koşulu altında şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{R}_\mu = \mu \mathbf{R} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Burada q_i ($i=0, 1, 2, 3$), ölçekli kuaterniyon elemanına ve μ ölçek parametresine karşılık gelmektedir. Problem doğrusal olmayan bir Gauss-Helmert modeli altında ele alındığından çözüm için iteratif bir doğrusallaştırma işlemi gereklidir (Aydın, 2016). İterasyon için kuaterniyon elemanlarının yaklaşık değerleri aşağıdaki gibidir (Mercan vd. 2018, Uygur vd. 2020):

$$q_{0,0} = 1, \quad q_{1,0} = 0, \quad q_{2,0} = 0, \quad q_{3,0} = 0 \quad (3)$$

Bu başlangıç değerleri, 3B benzerlik dönüşümü probleminin çözümünde her türlü dönüklük açısı ve ölçek parametresi için oldukça iyi sonuçlar vermektedir (Mercan, 2018). Aşağıda verilen yaklaşık doğrusal Gauss-Helmert modeli iteratif EKK yöntemi ile çözülür ve dönüşüm parametreleri belirlenir:

$$\tilde{\mathbf{y}} - (\mathbf{e}_2 + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) = (\mathbf{U} \quad \tilde{\mathbf{A}})\boldsymbol{\beta}; \quad \mathbf{P} = (\mathbf{Q}_2 + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{Q}_1\tilde{\mathbf{H}}^T)^{-1} \quad (4)$$

Burada $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{R}}_\mu \mathbf{X}_1$, $3n \times 1$ boyutlu kapanma vektörünü; $(\sim)$ yaklaşık değeri; $\tilde{\mathbf{A}}$, $3n \times 4$ boyutlu katsayıları matrisini; $\tilde{\mathbf{P}}$, $3n \times 3n$ boyutlu ağırlık matrisini; $\boldsymbol{\beta}$, 7×1 boyutlu bilinmeyen parametreler vektörünü; $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ ise sırasıyla, başlangıç ve hedef sistem koordinatları için $3n \times 3n$ boyutlu ağırlık katsayıları matrisini belirtmektedir. Eğer başlangıç sistemi koordinatları hatasız ise ($\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}$ alınırsa), bu durumda Eşitlik (4) ile verilen model asimetrik modele dönüşür.

Burada ifade edilen simetrik koordinat dönüşümünün iteratif EKK ile çözümü, toplam EKK çözümü ile özdeş sonuçlar vermektedir (bkz. Aydın 2016).

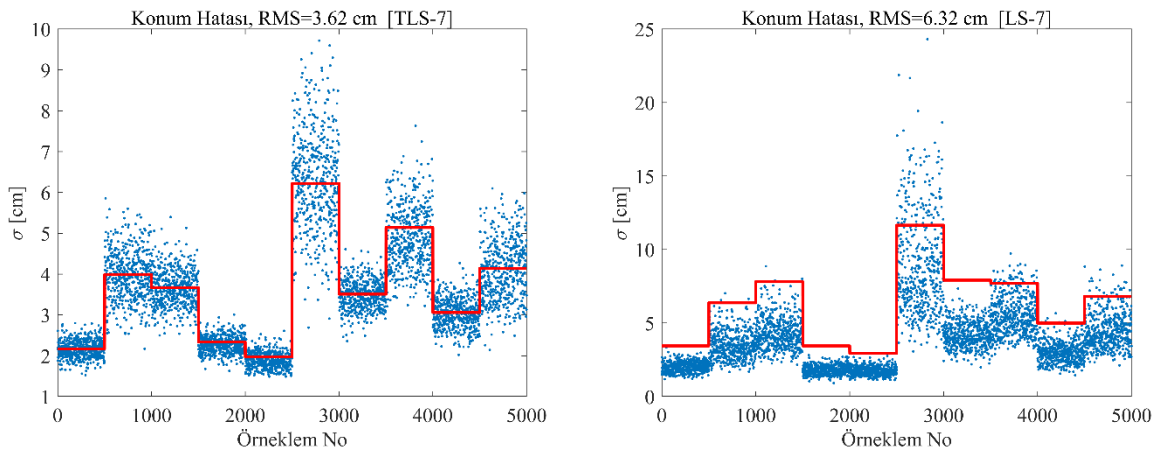
3. Sayısal Uygulamalar

3.1. Simetrik ve Asimetrik Koordinat Dönüşümlerinin Karşılaştırılması

Üç boyutlu benzerlik dönüşümünde başlangıç sistemine ilişkin koordinat hatalarının göz ardı edilmesinin etkilerini ve simetrik dönüşüm modelinin problemin çözümüne katkısını irdelemek amacıyla bir simülasyon çalışması tasarlanmıştır. Simülasyon stratejisi aşağıdaki gibi oluşturulmuştur:

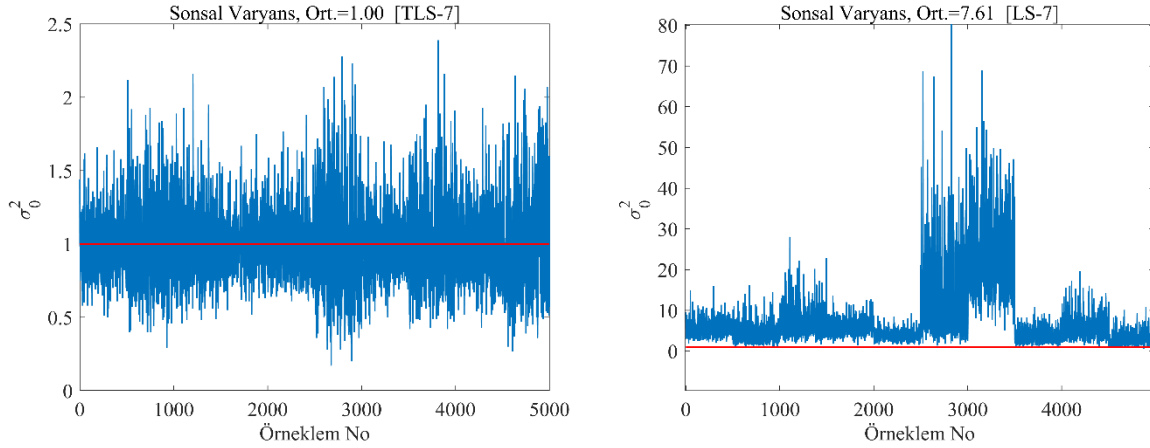
- Her bir konfigürasyon için, 5 ile 25 arasında rasgele seçilen noktanın başlangıç sistemi koordinatları $<1000 \text{ ile } 100000>$ m arasında olacak şekilde rasgele şekilde oluşturulmaktadır. Ötelemeler $<0 \text{ ile } 10000>$ m arasında, ölçek parametresi $<0.5 \text{ ile } 1.5>$ arasında ve dönüklükler ise $<-89 \text{ ile } 89>$ derece arasında olacak biçimde rasgele olarak belirlenmektedir. Rasgele üretilen bu parametreler yardımıyla hatasız hedef sistemi koordinatları belirlenmektedir. Koordinatların ağırlık katsayıları matrisleri, köşegen elemanları $<0 \text{ ile } 1>$ arasında olacak şekilde uniform dağılımlı olarak üretilir. Korelasyonlar ise ağırlık katsayılar matrisinin pozitif tanımlı olmasını sağlayacak şekilde; bu köşegen elemanlarına uyumlu olarak, nokta koordinat bileşenleri arasında $<-0.80 \text{ ve } 0.80>$ arasındaki bir oranda ve ağ noktaları arasında $<-0.20 \text{ ile } 0.20>$ arasındaki bir oranda rasgele olarak oluşturulur. Bu ağırlık katsayıları matrislerinin varyans çarpanlarıyla ölçeklendirilmesi yoluyla kovaryans matrisleri (C) elde edilir.
- İlgili kovaryans matrisleri kullanılarak her bir konfigürasyon için 500 farklı e_1 ve e_2 rasgele hata vektörleri üretilmektedir. Bilinen koordinatlar bu hatalar ile kirletilerek X_1 ve X_2 rasgele hatalı koordinat setleri elde edilmektedir. Her bir örnek için simetrik ve asimetrik çözümler gerçekleştirilmektedir. Bir konfigürasyon için ağırlık merkezinin hedef sistemdeki bilinen koordinatları ($X_{2,c}$, $Y_{2,c}$, $Z_{2,c}$) ile kestirilen parametreler ile belirlenen ($X'_{2,c}$, $Y'_{2,c}$, $Z'_{2,c}$) koordinatları arasındaki ΔX ve ΔY farkları hesaplanmakta ve 500 rasgele örneklem için bu farklardan konum hatası, $([\Delta X^2 + \Delta Y^2]/100)^{0.5}$ eşitliğine göre, deneysel olarak hesaplanmaktadır.

Bu çalışma için 100 farklı konfigürasyon öngörülmüş, başlangıç ve hedef sistemleri için varyans çarpanı 10 cm olarak seçilmiştir. Simülasyon stratejisinin ikinci adımına göre her bir konfigürasyon için 500 farklı $e_1 \sim N(0, 0.01 \text{ m}^2)$ ve $e_2 \sim N(0, 0.01 \text{ m}^2)$ rasgele hata vektörleri oluşturularak toplam 50 bin örnek için analiz yapılmıştır. Daha iyi yorumlayabilmek amacıyla 10 konfigürasyona indirgenmiş konum hatalarına ilişkin grafik sonuçlar Şekil 1'de verilmektedir.



Şekil 1. Simetrik ve asimetrik çözümler için konum hatalarının karşılaştırılması

Şekil 1'de kırmızı yatay çizgiler her bir konfigürasyon için hesaplanan deneysel konum hatalarına karşılık gelirken, mavi noktalar konum hatasının kestirilen parametrelere bağlı fonksiyonuna kovaryans yayılma kuralı uygulanması ile elde edilir. Teoride bu iki değer birbirine eşit olması beklenir. Ancak koordinatlara ilişkin rasgele hatalar nedeniyle pratikte bu eşitlik sağlan(a)maz. Bununla beraber, yansız (unbiased) bir kestirici kullanılıyorsa; kullanılan matematiksel model doğru ise kestirim değerleri beklenen değer etrafında normal dağılım gösterecektir. Grafik sonuçlar incelendiğinde her iki sistem koordinatlarının da hatalı olması durumunda simetrik çözüm yansız bir kestirici iken asimetrik çözüm sonuçları “bias”lıdır. Aynı durum Şekil 2’de gösterilen sonsal varyans kestirimlerinde daha da açık bir biçimde görülmektedir. Simülasyon sonucu elde edilecek sonsal varyansların beklenen değeri 1’dir. Simetrik dönüşüm sonucu elde edilen sonsal varyanslar “1” etrafında normal dağılmış iken asimetrik dönüşüm sonuçları “bias”lıdır. Ancak belirtmek gerekir ki Toplam EKK yöntemi de “bias”lı çözümler vermekle beraber jeodezik koordinat dönüşümü gibi sinyal-gürültü oranının yüksek olduğu uygulamalarda bu “bias” göz ardı edilebilir seviyelerdedir (Xu vd. 2014).



Şekil 2. Simetrik ve asimetrik çözümler için sonsal varyans kestirimleri

Konum hatası için gerçekleştirilen benzer bir karşılaştırma parametre bazında da gerçekleştirilmiştir. Her biri 500 farklı örneklem içeren 100 farklı konfigürasyon için parametrelerin bilinen değerleri ile kestirim değerleri arasındaki farklardan hesaplanan karesel ortalama hata (KOH) değerleri ile dengeleme sonucu elde edilen kovaryans matrislerinden elde edilen standart hata (SH) değerleri karşılaştırılmıştır. 50000 örneklemde elde edilen sonuçların ortalamaları Tablo 1’de verilmiştir.

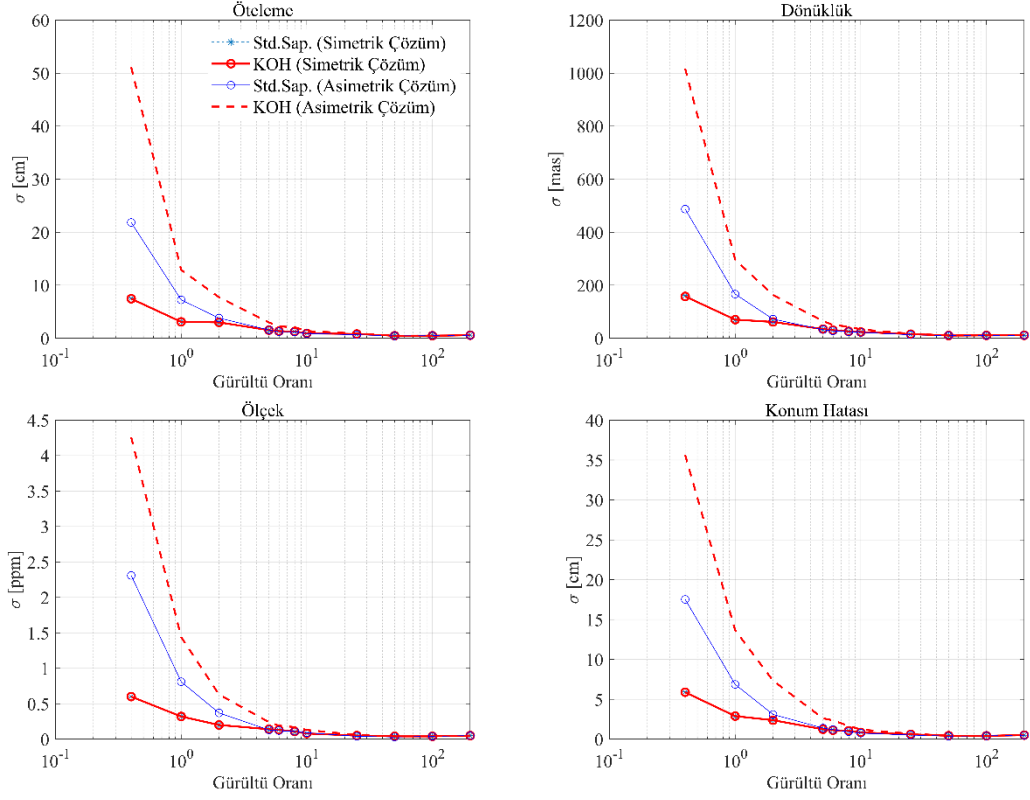
Tablo 1. Parametre bazında asimetrik ve simetrik modelin karşılaştırılması

Parametre	Simetrik Model		Asimetrik Model	
	KOH	SH	KOH	SH
Öteleme (cm)	4.18	4.12	7.62	4.31
Dönüklük (mas)	212.62	208.77	362.64	211.89
Ölçek (ppm)	0.35	0.34	0.64	0.35
Konum Hatası (cm)	3.68	3.64	6.75	3.78

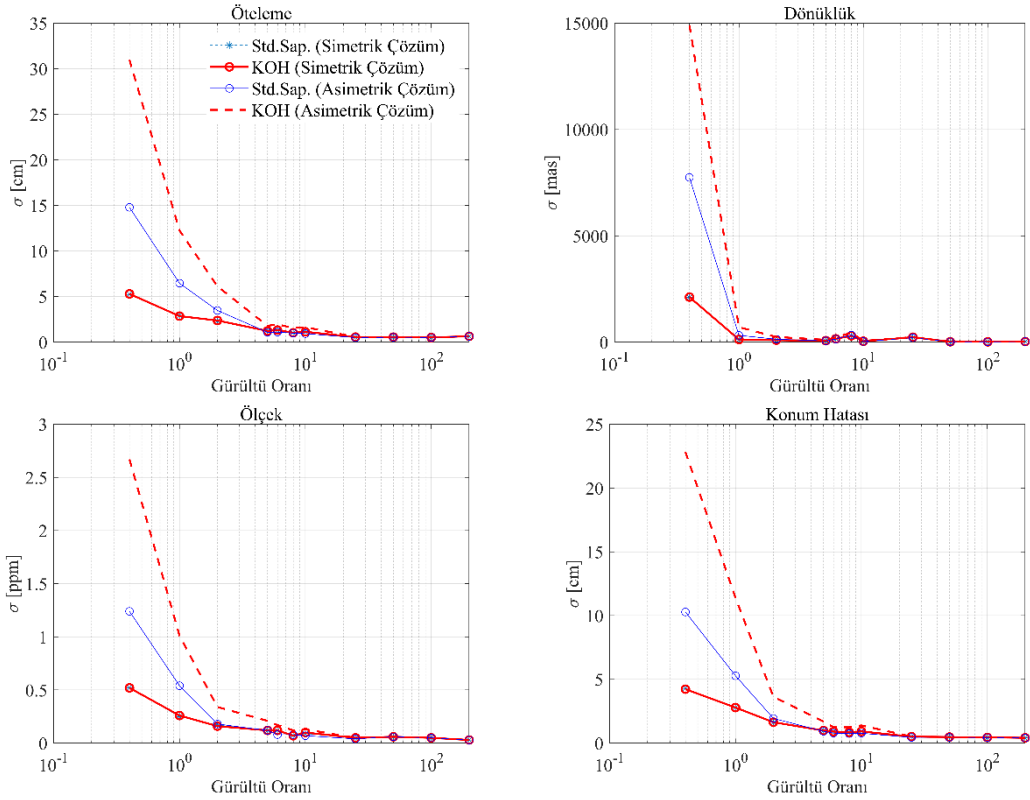
Tablo 1’de verilen sonuçlar önemlidir. Asimetrik model ile simetrik modelin kovaryans matrislerinden belirlenen standart hata değerlerinin neredeyse özdeş olduğu görülmektedir. Sadece bu sonuçlara bakılarak, getirdiği hesap yükü de göz önünde bulundurulduğunda, simetrik koordinat dönüşümünün gereksiz olduğu söylenebilir. Ancak dengeleme sonucu elde edilen standart hataların küçük olması tek başına matematiksel modelin doğru olduğunu söylemeye yetmez. Bilinen parametreler yardımıyla hesaplanan KOH değerleri simetrik çözüm için SH değerleri ile neredeyse özdeş iken asimetrik çözüm için oldukça farklıdır. Bu sonuçlar da yine asimetrik çözümün “bias”lı olduğunu göstermektedir. (Tablo 1’i basitleştirmek adına öteleme ve dönüklük parametreleri için sonuçlar x, y, z eksenleri için ayrı ayrı verilmek yerine bu üç eksen için sonuçların ortalaması olarak verilmiştir. Örneğin 50000 örneklem için KOH ve SH değerlerinin ortalaması tx, ty ve tz için sırasıyla 7.58/7.64/7.63 cm ve 4.19/4.37/4.37 cm iken ortalama KOH/SH değeri 7.62/4.31 cm olarak verilmiştir).

3.2. Simetrik ve Asimetrik Koordinat Dönüşümlerinin Farklı Varyans Çarpanları İçin Karşılaştırılması

Bir önceki bölümde ele alınan simülasyon çalışmasında koordinat kovaryans matrislerinin ölçeklendirilmesi özdeş varyans çarpanları ile gerçekleştirilmiştir. Bu durumda başlangıç ve hedef sistem koordinat kovaryans matrisleri birbirinden farklı olmakla beraber yakın gürültü oranlarına sahip olurlar. Bu çalışmada ise her iki sistem için koordinat kovaryans matrislerinin birbirlerinden farklı varyans çarpanları ile ölçeklendirilmesinin parametre kestirimine etkisi araştırılmıştır. Bu amaçla ilk olarak açıların diferansiyel büyüklükler ve ölçek parametresinin bire çok yakın olduğu 20 noktalı bir jeodezik koordinat dönüşümü örneği tasarlanmıştır. Hedef sistem koordinat kovaryans matrisleri için varyans çarpanı 5 cm (Var2=5 cm sabit) olarak alınırken Var2/Var1 oranı 0.4 ile 200 arasında değişecek şekilde başlangıç sistemi için varyans çarpanları değiştirilmiştir. Her bir varyans çarpanı için algoritma 1000 kez çalıştırılıp, KOH ve SH değerleri belirlenmiştir. İlgili konfigürasyon için sonuçlar grafik olarak Şekil 3’te gösterilmiştir. Grafikler incelendiğinde tüm dönüşüm parametreleri için başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarından 10 kat veya daha yüksek doğruluğa sahip olması durumunda asimetrik ve simetrik koordinat dönüşümlerinde parametre kestirimlerinin özdeş sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 3. İki sisteme ilişkin farklı varyans çarpanları öngörülmesi durumunda simetrik ve asimetrik çözümlerin karşılaştırılması – jeodezik koordinat dönüşümü örneği

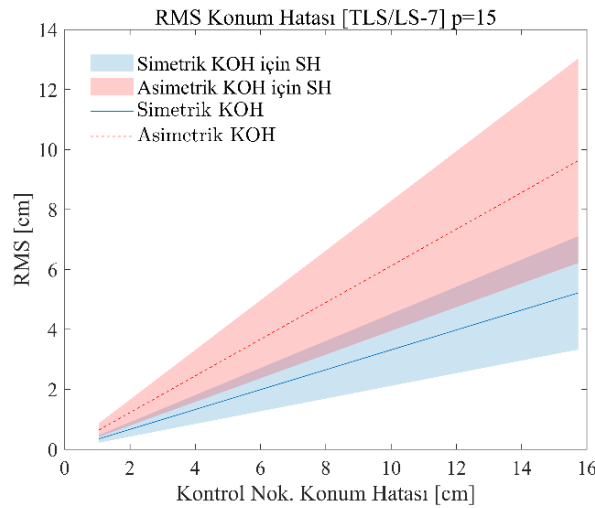


Şekil 4. İki sisteme ilişkin farklı varyans çarpanları öngörülmesi durumunda simetrik ve asimetrik çözümlerin karşılaştırılması – dönüşüm parametrelerinin büyük olduğu konfigürasyon

Jeodezik koordinat dönüşümü örneğinden elde edilen sonuç pratik çalışmalar için önemlidir. Bununla beraber bu sonuç 3B benzerlik dönüşümü için genellenebilir mi, yoksa yalnızca dönüklüklerin diferansiyel büyüklükler olduğu jeodezik koordinat dönüşümü problemleri için mi geçerlidir sorusunun cevabı önemlidir. Bu amaçla dönüklük açılarının büyük ve ölçek faktörünün 1’den çok farklı olduğu bir konfigürasyon tasarlanmıştır. Bu örnekte dönüklük açılarının bilinen değerleri x, y, z eksenleri için sırasıyla -16.9, 56.5, -85.4 derece ve ölçek faktörünün bilinen değeri 0.6457’dir. Aynı strateji ile 1000 örneklem için grafik sonuçlar Şekil 4’te verilmiştir. Bu konfigürasyon için de başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarından 10 kat veya daha yüksek doğruluğa sahip olması durumunda asimmetrik ve simetrik koordinat dönüşümlerinin özdeş sonuçlar verdiği görülmektedir.

3.3. Konum Doğruluğu Karşılaştırması

Bu uygulamada, ilk uygulamada oluşturulan simülasyon stratejisi izlenmiş ve her iki sistem için de koordinat kovaryans matrisleri özdeş varyans çarpanlarıyla ölçeklendirilmiştir. Varyans çarpanlarının karekökleri sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, 10 ve 15 cm alınarak her bir varyans çarpanı için, her biri 500 farklı örneklem (500 farklı rasgele hata vektörü) içeren 100 farklı konfigürasyon için toplam 50 bin analiz yapılmıştır ve kontrol noktalarının hatalarına bağlı olarak merkez noktanın konum doğruluğundaki değişimler irdelenmiştir. Her bir standart sapma için elde edilen konum hatası, toplam 50 bin örnekten elde edilen konum hatalarının aritmetik ortalamasıdır. Sonuçlar Şekil 5’te gösterilmektedir.



Şekil 5. Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık ağırlık merkezi konum hatalarının KOH değişimi

Şekil 5 incelendiğinde; başlangıç ve hedef sistem koordinatlarının standart sapmalarının artması durumunda, her iki çözüm için de predikte edilen nokta konum hatalarının arttığı görülmektedir. Bu artış yalnızca hedef sistem koordinat hatalarının dikkate alınması durumunda daha belirgindir. Bu sonuç, simetrik koordinat dönüşümünün yeni noktaların prediksyonunda klasik koordinat dönüşümüne göre daha doğru sonuçlar verdiğini göstermektedir.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada üç boyutlu benzerlik dönüşümü probleminde kuaterniyon tabanlı (a)simetrik koordinat dönüşümü algoritmasının performansı irdelenmiştir. Bu algoritma dönüşüm parametrelerinin büyüklüğünden bağımsız olarak oldukça iyi sonuçlar vermektedir. İteratif çözüm için önerilen başlangıç değerleri ile her türlü dönüklük açısı ve ölçek parametresi nihai çözüme oldukça hızlı bir biçimde yakınsar.

Geniş örneklem aralığında gerçekleştirilen uygulama sonuçları göstermektedir ki, bazı özel durumlar dışında problemin çözümünde başlangıç sistemi koordinat hatalarını göz ardı etmek “bias”lı parametre kestirimlerine neden olmaktadır. Dolayısıyla her iki sistem koordinatlarına ilişkin kovaryans bilgisi mevcut ise, koordinat dönüşümü problemini simetrik model altında ele almak daha doğru sonuçlar elde edilmesini sağlar. Benzer biçimde simetrik koordinat dönüşümü daha yüksek konum doğruluğu sağlamaktadır. Bu nedenle yeni noktaların prediksyonunda ya da dönüşüm parametrelerine ilişkin başka fonksiyonların ele alınmasında simetrik koordinat dönüşümü daha doğru sonuçlar verecektir.

Son olarak çalışmada (pratikte) ne zaman klasik EKK dengelemesi ile, ne zaman simetrik koordinat dönüşümü ile çözüm gerçekleştirilmeli sorusunun cevabı aranmıştır. Bu kapsamda gerçekleştirilen uygulamalar sonucu dönüklük parametrelerinin büyüklüğünden bağımsız olarak; başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistemi koordinatlarından 10 kat veya daha fazla doğruluğa sahip olması durumunda her iki çözüm için de parametre kestirimlerinin özdeş olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Kaynaklar

- Akyılmaz O. (2007) Total least squares solution of coordinate transformation. *Survey Review* 39(303), 68-80.
- Amiri-Simkooei A.R., Jazaeri S. (2012) Weighted total least squares formulated by standard least squares theory. *Journal of Geodetic Science* 2(2), 113-124.
- Aydın C., Uygur M., Uygur S. Ö. (2014) Ağırlıklı toplam en küçük kareler çözümü: Üç farklı algoritma ve 2-boyutlu afin dönüşümüne uygulanması. *Harita Dergisi* 152, 1-11.
- Aydın C. (2016) Koordinat dönüşümünde EIV model klasik dengeleme yoluyla nasıl çözülür?. *Jeodezi ve Jeoinformasyon Dergisi* 3(1), 49-57.
- Aydın C., Mercan H., Uygur S.Ö. (2018) Increasing numerical efficiency of iterative solution for total least-squares in datum transformations. *Studia Geophysica et Geodetica* 62(2), 223-242.
- Golub H.G., Van Loan F.C. (1980) An analysis of the total least squares problem. *SIAM Journal of Numerical Analysis* 17(6), 883-893.
- Mercan H., Akyılmaz H., Aydın C. (2018) Solution of the weighted symmetric similarity transformations based on quaternions. *Journal of Geodesy* 92(10), 1113-1130.
- Nietzel F. (2010) Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation. *Journal of Geodesy* 84, 751-762.
- Shen Y., Li B., Chen Y. (2011) An iterative solution of weighted total least-squares adjustment. *Journal of Geodesy* 85, 229-238.
- Snow K. (2012) *Topics in total least-squares adjustment within the errors-in-variables model: singular cofactor matrices and prior information*. Doktora Tezi, The Ohio State University, Ohio, USA
- Teunissen P.J.G. (1985) The geometry of the geodetic inverse linear mapping and non-linear adjustment. *Publications on Geodesy* 8(1), 1-186.
- Tong X., Jin Y., Li L. (2014) An improved weighted total least squares method with applications in linear fitting and coordinate transformation. *Journal of Surveying Engineering* 137, 120-128.
- Uygur S.Ö., Aydın C., Akyılmaz O. (2020) Retrieval of euler rotation angles from 3d similarity transformation based on quaternions. *Journal of Spatial Science* 31(10), doi: 10.1080/14498596.2020.1776170.
- Xu P., Liu J., Zeng W., Shen Y. (2014) Effects of errors-in-variables on weighted least squares estimation. *Journal of Geodesy* 88, 705-716.