

GPS İLE ELDE EDİLEN ELİPSOİDAL YÜKSEKLİKLERİN YEREL YÜKSEKLİK SİSTEMİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Mustafa YANALAK¹

Cankut D. İNCE¹

ÖZET

Bu çalışmada, İller Bankası Genel Müdürlüğü ile yapılan protokol çerçevesinde İTÜ tarafından gerçekleştirilen Zonguldak GPS Ağı Projesi kapsamındaki GPS ölçmelerinden elde edilen elipsoidal yükseklikler, üç ayrı enterpolasyon yöntemiyle yerel yükseklik sistemine dönüştürülmüştür. Her iki sistemde yükseklikleri bilinen 112 nirengi noktasından 18 adedi dayanak noktası olarak seçilmiş ve bu noktalardaki GPS ile yerel yükseklikler arasındaki farklar kullanılarak, geriye kalan 94 nirengi noktasındaki farklar değişik yöntemlerle enterpole edilmiştir. Enterpolasyon sonucu bulunan bu farklar, ölçmelerden (GPS ve farklı zamanlı karşılıklı trigonometrik nivelman) elde edilen farklarla karşılaştırılmıştır.

1. GİRİŞ

Son yıllardaki hızlı teknolojik gelişmeler Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliğinde de etkilerini göstermiş ve GPS (Global Positioning System) tekniği yaygın olarak kullanılır hale gelmiştir. GPS ağındaki, bilinen noktaların yatay konum doğruluklarının yüksek olması durumunda, koordinatları belirlenecek olan noktaların yatay konum doğruluğu santimetrenin altına inebilmektedir. Buna karşılık üçüncü boyutun belirlenmesinde bu doğruluğa ulaşamamaktadır. GPS ile elde edilen yüksekliklerin elipsoidal (WGS-84) yükseklikler olmasına karşın, uygulamada yerel yükseklik sistemleri kullanılmaktadır. Bu nedenle GPS yüksekliklerinin

¹ İTÜ İnşaat Fak. Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Böl. Ölçme Tekniği Anabilim Dalı.

kullanılan yerel sisteme dönüştürülmesi gerekmektedir. Dönüşüm işlemi çeşitli yöntemlerle yapılabilir. Bu dönüşümün yapılabilmesi için bölgede elipsoidal yüksekliklerinin yanı sıra yerel yükseklikleri de bilinen noktalara ihtiyaç vardır. Dönüşüm sonucu elde edilecek yerel yüksekliklerin doğruluğu, uygulanan algoritmanın yanında dayanak noktalarının (her iki sistemde de yüksekliği bilinen noktalar) doğruluğuna bağlıdır.

Bu çalışmada, İller Bankası Genel Müdürlüğü ile yapılan protokol çerçevesinde İTÜ tarafından gerçekleştirilen Zonguldak GPS Ağı Projesi kapsamındaki GPS ölçmeleri değerlendirilmiş ve üç çeşit enterpolasyon yöntemiyle yükseklik dönüşümü yapılmıştır. Kullanılan enterpolasyon yöntemleri;

- Ağırlıklı aritmetik ortalama ile enterpolasyon (4 ayrı ağırlık modeli kullanılmıştır),
- Polinomlarla (1. ve 2. derece) enterpolasyon ve
- Multikvadrik enterpolasyon yöntemidir.

Bütün enterpolasyonlarda, aynı 18 dayanak noktası kullanılmış ve 94 adet nirengi noktasının GPS yükseklikleri ile yerel yükseklikleri arasındaki farkları hesaplanmıştır. Söz konusu 94 noktanın yerel yükseklikleri farklı zamanlarda yapılan karşılıklı trigonometrik nivelmanla belirlenmiş olduğundan, enterpolasyonla bulunan farklar, trigonometrik nivelmandan bulunan farklarla karşılaştırılmıştır.

2. GPS ile Yüksekliklerin Belirlenmesi

GPS ile yapılan ölçmeler sonucunda, bazlara ilişkin üç boyutlu koordinat farkları (dx , dy ve dz) ölçülür. Bu değerler, Yermerkezli Kartezyen Koordinat Sisteminin bileşenleridir. GPS ağındaki tüm bazların birlikte dengelenmesiyle noktaların kartezyen koordinatları (X , Y , Z) ya da elipsoidal koordinatları (B , L , h) elde edilir. Burada elde edilen yükseklikler (h), WGS84 elipsoidine göre hesaplanmış elipsoidal yüksekliklerdir. Bu elipsoidal yüksekliklerden noktaların başka bir sistemdeki yüksekliklerinin

hesaplanabilmesi için, çalışma alanında düzenli olarak dağılmış her iki sistemde de yükseklikleri bilinen ortak noktalara ihtiyaç vardır (Ayan, ve diğ., 1996).

GPS ölçmelerinden, ortometrik yüksekliklerin ya da bir yerel sistemdeki yüksekliklerin hesaplanabilmesi için çok çeşitli yöntemler vardır. Her yöntemin de kendine göre güçlü ve zayıf yanları bulunmaktadır. Genellikle, tüm yöntemlerde rastlanan problem, her iki sistemde de yüksekliği bilinen noktaların az sayıda olması ve bu noktalardaki ondülasyonların (N) yeterli doğrulukta bilinmemesidir. GPS ile elipsoid yükseklikler, rölatif olarak yaklaşık $\pm(0.2\text{cm} + 0.01-0.1\text{ppm})$ doğrulukla elde edilebilir (Fiedler, 1992). Başarılı bir dönüşüm için ortak noktalardaki ondülasyonların da yaklaşık aynı doğrulukta olması istenir. Bu da ortak noktaların yerel sistemdeki yüksekliklerinin (H) aynı doğrulukla elde edilmiş olması demektir. Yerel sistemlerde bu doğruluğa ulaşmak genellikle pek mümkün olamamaktadır. Sonuç olarak GPS ile yüksekliklerin bulunmasında iki önemli unsur başarılı sonuçlar alınmasında rol oynar. Bunlar;

1. Dönüşümde kullanılan enterpolasyon yönteminin ve sonuçta hesaplanan yüzeyin, o bölgeye uygun olması ve iyi sonuçlar vermesi,
2. Dönüşümde kullanılacak ortak noktaların GPS ile bulunan elipsoid yüksekliklerinin yanı sıra, yerel sistemdeki yüksekliklerinin de yüksek bir doğrulukla bilinmesidir.

Elipsoid yüksekliklerden bir yerel sisteme dönüşümün genel bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$h = H + N \quad (2.1)$$

Bu çalışmada 18 ortak nokta (dayanak noktası) kullanılarak N_i 'ler ($i=1,2,...,18$) hesaplanmıştır (bak, Tablo 1.). Dayanak noktalarından elde edilen 18 adet fark esas alınarak 94 adet nirengi noktasındaki farklar üç değişik enterpolasyon yöntemiyle hesaplanmıştır. Söz konusu 94 adet nirengi noktasının yerel sistemdeki yükseklikleri, farklı zamanlarda yapılan karşılıklı trigonometrik nivelmanla daha önceden belirlenmiştir. GPS ile bulunan elipsoid yüksekliklerle trigonometrik nivelmandan bulunan yerel sistemdeki

yükseklikler arasındaki farklar, enterpolasyonla bulunan farklarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 1.Onsekiz Dayanak Noktasındaki Elipsoidal ve Yerel Yükseklikler Arasındaki Farklar

NOKTA NO	H (m)	h (m)	$N = h - H$ (m)
0004	268.3616	301.3876	33.0260
0006	88.2700	121.2049	32.9349
0025	280.9396	313.2957	32.3561
0631	62.0232	94.5203	32.4971
2002	205.4720	237.5971	32.1251
4004	152.1060	184.3058	32.1998
0652	7.2124	39.9962	32.7838
0657	38.4341	71.0391	32.6050
0666	5.6411	37.9752	32.3341
0676	108.6859	141.6634	32.9775
0693	440.7352	473.7339	32.9987
0702	19.7041	52.6165	32.9124
0711	96.1714	129.3675	33.1961
0726	241.3660	274.4567	33.0907
0558	117.1950	150.2571	33.0621
0537	237.2300	270.3206	33.0906
0508	219.7790	252.7176	32.9386
0521	188.3120	220.4227	32.1107

3. ENTERPOLASYON İŞLEMİ

Enterpolasyon, belirli bir konumdaki bilinmeyen fonksiyonel bağımlılık değerinin civar konumlardaki bilinen fonksiyonel bağımlılık değerlerinden yararlanarak belirlenmesi işlemidir. Jeodeziye daha yatkın bir tanımlama yapmak gerekirse, ölçme noktalarındaki ölçme büyüklükleri yardımıyla ölçme yapılmamış noktalardaki olası ölçme büyüklüklerinin kestirimidir.

Bu çalışmada, (x_i, y_i) düzlem dik koordinatları bilinen dayanak noktalarındaki bilinen $z_i (N_i)$ fonksiyonel bağımlılık değeri yardımıyla, sadece (x_0, y_0) düzlem dik koordinatları bilinen enterpolasyon noktalarındaki $z_0 (N_0)$ fonksiyonel

bağımlılık değeri enterpole edilmektedir. Bu şekliyle uygulanan enterpolasyon aslında bir yüzey uydurma problemidir (Yanalak). Dayanak noktalarını gereğince temsil eden bir yüzeyin belirlenmesi, enterpolasyon büyüklüklerinin hesaplanabilmesi anlamına gelir. Konum koordinatları bilinen herhangi bir enterpolasyon noktasındaki kestirim değeri, yüzeyin o noktadaki yükseklik değerine eşit olur. Yüzeyin belirlenmesinde kullanılacak yaklaşımlara bağlı olarak değişik enterpolasyon yöntemleri türetilmiştir. Çalışmamızda kullanılan yöntemler şunlardır:

- Ağırlıklı aritmetik ortalama ile enterpolasyon
- Polinomlarla enterpolasyon
- Multikvadrik enterpolasyon

3.1. Ağırlıklı Aritmetik Ortalamayla Enterpolasyon

Bu yöntemde, enterpolasyon noktasının yüksekliği, çevresinde bulunan dayanak noktalarının yüksekliklerinden ağırlıklı olarak hesaplanır. Her bir dayanak noktasının yüksekliğine verilecek olan ağırlık değeri o noktanın enterpolasyon noktasına olan uzaklığın bir fonksiyonudur. Bir enterpolasyon noktasının yüksekliği,

$$z_0 = \sum_{i=1}^m p_i * z_i / \sum_{i=1}^m p_i \quad (3.1)$$

eşitliği ile bulunur.

Ağırlık fonksiyonu olarak, (x_i, y_i) herhangi bir dayanak noktasının, (x_0, y_0) yüksekliği belirlenecek enterpolasyon noktasının düzlem koordinatları olduğuna göre,

$$p_i = \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \right]^{-k} = (s_i^2)^{-k}, \quad i=1,2,\dots,m \quad 2k=1,2,3 \quad (3.2)$$

eşitliği kullanılabileceği gibi,

$$p_i = e^{(-s_i^2/k^2)}, \quad i=1,2,\dots,m \quad k=3,4,5 \quad (3.3)$$

şeklindeki Gauss fonksiyonu da kullanılabilir (Güler, 1978,1985).

Bu çalışmada kullanılan ağırlık modelleri şunlardır:

1. $p_i = 1/s_i$
2. $p_i = 1/s_i^2$
3. $p_i = e^{(-s_i^2/k^2)} \quad k=3$
4. $p_i = e^{(-s_i^2/k^2)} \quad k=4$

3.2. Polinomlarla Enterpolasyon

Bu yöntemin ana fikri, yüzeyi tek bir fonksiyonla ifade etmektir. x, y, z koordinatları bilinen dayanak noktalarının oluşturduğu yüzeyin, n 'inci dereceden bir polinomla matematiksel ifadesi,

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k-i}^k a_{ij} x^i y^j \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada,

a_{ij} : Polinomun bilinmeyen katsayılarını

n : Yüzeyin derecesini

i, j : (x, y) koordinatlarının üssü olan pozitif tamsayıları, göstermektedir (Erkanlı, 1986).

Yüzeyin derecesi arttıkça gereksinim duyulan dayanak nokta sayısı da artmaktadır. Bu da dayanak noktalarının yeterli sayıda olmaması durumunda büyük hatalara neden olur. Polinom derecesinin artması, elde edilecek doğruluğun artacağı anlamına gelmez. Derecenin artmasıyla yüzeyde gereksiz salınımlar oluşur. Yüzeyde oluşan ani inip çıkımlar gerçeğe uygun olmayan yükseklik değişimlerine neden olur. (3.4)

formülünde $n = 2$ alındığında k sırasıyla 0,1,ve 2 değerlerini alır. k değerine karşılık i, j çiftinin alabileceği değerler,

$$k=0 \Rightarrow (i=0, j=0)$$

$$k=1 \Rightarrow (i=0, j=1) (i=1, j=0)$$

$k=2 \Rightarrow (i=2, j=0) (i=1, j=1) (i=0, j=2)$ ve 2. derece polinomun açık matematiksel ifadesi,

$$z(x, y) = a_{00} + a_{01}y + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \quad (3.5)$$

olur.

Görüldüğü gibi 2. derece polinomun belirlenmesi için 6 katsayının hesaplanması gerekmektedir. (x, y, z) koordinatları bilinen 6 dayanak noktası ile bu problem çözülebilir. Diğer bir deyişle 6 dayanak noktalı bir yüzey 2. derece bir yüzeyle tam olarak ifade edilebilir. Oluşturulacak yüzey dayanak noktalarından geçecektir. 6'dan fazla dayanak noktası olması durumunda, çözüm için yeterli sayıdan fazla denklem oluşacağı için katsayılar, en küçük kareler yöntemine göre dengelemeyle bulunur. Bu durumda yüzey dayanak noktalarından geçmez.

m , dayanak noktası sayısını göstermek üzere, 2. derece polinomun düzeltme denklemleri, $L=1,2,\dots,m$ için

$$\Delta z_L = a_{00} + a_{01}y_L + a_{10}x_L + a_{20}x_L^2 + a_{11}x_Ly_L + a_{02}y_L^2 - z_L \quad (3.6)$$

olur.

$$\sum_{L=1}^m \Delta z_L^2 = \min. \quad (3.7)$$

koşulundan yararlanarak dengelenmiş yüzeyin katsayıları belirlenir. n . derece bir polinom kullanılması durumunda polinomdaki katsayıların (bilinmeyenlerin) sayısı artar. Yapılacak işlem sırasında bir değişiklik olmaz. Oluşturulacak düzeltme denklemleri genel olarak,

$$\Delta z_L = z(x_L, y_L) - z_L \quad L=1,2,\dots,m \quad (3.8)$$

şeklinde dir. (3.7) koşulundan yola çıkarak kurulan normal denklem takımının çözümü, bilinmeyenleri (katsayıları) verir. Yüksekliği istenen bir noktanın (x_0, y_0) koordinatları polinomda yerine konulduğunda o noktanın z_0 yüksekliği bulunabilir.

3.3. Multikuadrik Enterpolasyon

Bu enterpolasyon yönteminin amacı dayanak noktalarının tümünü aynı anda kullanarak yüzeyi tek bir fonksiyonla ifade etmektir. Yöntemin uygulanmasında öncelikle, m sayıdaki dayanak noktası kullanılarak bir trend yüzeyi geçirilir. Bu yüzey için polinom, harmonik seri veya trigonometrik fonksiyonlar kullanılabilir. Şimdiye kadar yapılan uygulamalar 1. veya 2. dereceden bir polinomun yeterli olduğunu göstermiştir (Leberl, 1973).

Trend yüzeyi olarak n . dereceden bir polinom alınması durumunda, Bölüm 3.2'de açıklandığı şekilde $z(x_j, y_j)$ polinomunun katsayıları ve dayanak noktalarındaki Δz_j artık yükseklik değerleri (düzeltmeler) hesaplanır (polinom katsayılarının sayısı dayanak noktalarının sayısından az olmalıdır).

$$\Delta z_j = z_j - z(x_j, y_j) \quad j=1,2,\dots,m \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^m C_j [Q(x_j, y_j, x, y)] = \Delta z \quad (3.10)$$

genel ifadesi ile verilen multikuadrik yüzey, m sayıda aynı türden Q yüzeyinin toplamından oluşur. C_j katsayıları her bir Q yüzeyinin eğimini ve işaretini belirler ve Δz_j artık yükseklik değerleri yardımıyla hesaplanır. Literatürde, her bir Q yüzeyinin simetri eksenini bir dayanak noktasından geçecek şekilde aşağıdaki multikuadrik yüzeyler önerilmiştir (Hardy 1971):

- İki yapraklı dairesel hiperboloid serilerinin toplamı (k , sabit bir katsayıdır)

$$\sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + k]^{1/2} = \Delta z \quad (3.11)$$

- Dairesel paraboloid serilerinin toplamı,

$$\sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + k] = \Delta z \quad (3.12)$$

- Dairesel dik konilerin toplamı,

$$\sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2]^{1/2} = \Delta z \quad (3.13)$$

C_j katsayılarının belirlenmesinde, dayanak noktalarının bilinen $(x_j, y_j, \Delta z_j)$ değerlerinden yararlanılır. Multikvadrik yüzey olarak dairesele dik konilerin seçildiği kabulü ve herhangi iki dayanak noktası için,

$$[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2} = a_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.14)$$

kısaltması ile (3.13) eşitliği,

$$\sum_{j=1}^m C_j a_{ij} = \Delta z_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.15)$$

şeklini alır. (3.15) bağıntısından,

$$\begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + \dots + C_m a_{1m} &= \Delta z_1 \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + \dots + C_m a_{2m} &= \Delta z_2 \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 a_{33} + \dots + C_m a_{3m} &= \Delta z_3 \\ \vdots & \\ C_1 a_{m1} + C_2 a_{m2} + C_3 a_{m3} + \dots + C_m a_{mm} &= \Delta z_m \end{aligned} \quad (3.16)$$

denklemleri elde edilir. Bilinmeyen C_j katsayıları ,

$$\underline{C} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{\Delta z} \quad (3.17)$$

şeklinde belirlenir. $\underline{A}$ matrisinin simetrik ve köşegen elemanlarının 0 olduğu göz önüne alınırsa işlemler daha kolaylaşacaktır. C_j katsayılarının belirlenmesi ile multikvadrik yüzey oluşmuş demektir. (x_0, y_0) koordinatları bilinen herhangi bir enterpolasyon noktasının yüksekliği,

$$z_0 = z(x_0, y_0) + \Delta z_0 = z(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2]^{1/2} \quad (3.18)$$

eşitliği ile hesaplanır. Dayanak nokta sayısı arttıkça yöntemin hesap yükü artar. Bu yük özellikle C_j katsayıları belirlenirken alınacak invers işleminden kaynaklanmaktadır. Yöntem hakkında temel kaynak olarak Hardy (1971, 1972, 1975 ve 1990) verilebilir.

4. SONUÇLAR

Tablo 2. Ölçmelerden (GPS ve Trigonometrik) ve Enterpolasyonlardan Bulunan Farklar

Nok.	Ağırlıklı Ortalama Ent. (m)				Polinomlarla Ent. (m)		Multikua	GPS-Trig
No.	(1)	(2)	(3)	(4)	1.Derece	2.Derece	Ent. (m)	(m)
2	32.81007	32.91381	32.88350	32.82485	32.96667	32.94978	33.02993	33.03769
427	32.88714	32.96945	32.99062	32.97427	32.82711	32.82939	32.83998	32.82560
1557	32.50953	32.30757	32.35263	32.41054	32.17432	32.19867	32.18123	32.18190
560	32.49631	32.29561	32.25415	32.31243	32.09144	32.11789	32.10879	32.13680
561	32.50404	32.31328	32.23739	32.29858	32.11061	32.13460	32.12375	32.14810
562	32.49717	32.30205	32.20950	32.27610	32.14858	32.16765	32.15343	32.19520
563	32.50574	32.31795	32.22754	32.29691	32.20862	32.22299	32.20828	32.25240
564	32.50725	32.31772	32.27943	32.34138	32.21560	32.23203	32.22117	32.28010
565	32.28918	32.12323	32.12452	32.15726	32.07103	32.08657	32.07860	32.11530
566	32.28716	32.13234	32.14220	32.19608	32.11610	32.13221	32.11274	32.14600
567	32.43491	32.20372	32.16648	32.23120	32.14163	32.15826	32.14061	32.15901
569	32.35950	32.15078	32.14524	32.19908	32.08635	32.10587	32.08766	32.09240
570	32.41711	32.18628	32.15814	32.21858	32.10918	32.12811	32.11044	32.13400
571	32.48105	32.27075	32.19025	32.25686	32.13958	32.15828	32.14273	32.18291
574	32.40183	32.17395	32.15737	32.21952	32.13695	32.15310	32.13470	32.17171
575	32.50445	32.30868	32.24122	32.29848	32.05583	32.08472	32.07472	32.11760
576	32.46728	32.26096	32.36521	32.41898	32.26397	32.28057	32.27018	32.28530
577	32.56504	32.43861	32.41279	32.47182	32.29824	32.31553	32.28808	32.28690
578	32.57260	32.47677	32.46310	32.49741	32.43148	32.43632	32.41724	32.32671
638	32.64466	32.57128	32.63269	32.62648	32.63615	32.62981	32.63381	32.66150
641	32.92526	32.97001	33.03317	33.01760	32.98546	32.98445	32.95914	32.97700
642	32.92340	33.01529	33.03238	33.00983	32.97823	32.97833	32.97774	32.96010
643	32.92227	33.03416	33.02432	32.99961	32.95603	32.95692	32.96913	32.93380
644	32.90801	33.00885	33.00822	32.98632	32.90862	32.91028	32.92494	32.86740
645	32.86681	32.92597	32.95734	32.95193	32.75720	32.76082	32.77548	32.69010
646	32.85894	32.90007	32.93756	32.93874	32.75525	32.75967	32.77909	32.68260
647	32.85663	32.88337	32.92922	32.93289	32.78144	32.78603	32.80798	32.74690
648	32.84408	32.83715	32.91343	32.92136	32.80410	32.80880	32.83190	32.97740
649	32.81974	32.79576	32.89055	32.90348	32.78221	32.78757	32.81236	32.74150
650	32.85104	32.87576	32.90406	32.91137	32.86443	32.86792	32.86771	32.85680
653	32.81857	32.80469	32.87240	32.88841	32.74890	32.75506	32.77679	32.73840
655	32.79000	32.76823	32.82652	32.84770	32.65376	32.66242	32.67773	32.59360
656	32.74963	32.66692	32.80593	32.82512	32.63377	32.64311	32.65524	32.60290
658	32.73009	32.65720	32.74551	32.77040	32.56905	32.58036	32.58794	32.51490

Tablo 2'nin devamı

Nok.	Ağırlıklı Ortalama Ent. (m)				Polinomlarla Ent. (m)		Multikua	GPS-Trig
No.	(1)	(2)	(3)	(4)	1.Derece	2.Derece	Ent. (m)	(m)
659	32 73133	32 69173	32 69905	32 73457	32 54883	32 56056	32 56303	32 57930
660	32 70834	32 64471	32 64649	32 69964	32 51287	32 52571	32 52118	32 55100
661	32 70144	32 62975	32 64912	32 69824	32 56080	32 57100	32 56968	32 60220
662	32 67810	32 56858	32 60536	32 67205	32 49606	32 50919	32 49800	32 56460
663	32 59390	32 40833	32 52398	32 61543	32 40435	32 42121	32 39056	32 45750
665	32 61121	32 43784	32 55109	32 63240	32 47103	32 48448	32 46075	32 32090
667	32 54790	32 38814	32 46152	32 55488	32 35147	32 36989	32 32019	32 33900
668	32 54656	32 39389	32 44668	32 53607	32 32979	32 34894	32 29608	32 33739
670	32 56598	32 42332	32 42649	32 50090	32 30101	32 32039	32 27493	32 32880
671	32 57288	32 43970	32 42660	32 49695	32 30609	32 32473	32 28357	32 36160
672	32 56644	32 43486	32 40155	32 46357	32 26543	32 28521	32 25527	32 32320
673	32 57562	32 44482	32 40700	32 47692	32 25793	32 27933	32 23900	32 28111
674	32 56472	32 42138	32 37676	32 43971	32 19454	32 21889	32 18836	32 20810
675	32 96085	32 99688	33 02984	33 02473	33 02117	33 01851	32 99912	33 02670
677	32 85019	32 94129	32 92772	32 87589	32 99528	32 98597	33 00473	32 97481
679	32 84634	32 95496	32 89348	32 84325	32 93298	32 92446	32 96917	32 96069
680	32 79114	32 83719	32 82182	32 80526	32 76684	32 76900	32 79007	32 83121
681	32 76289	32 77486	32 76882	32 77222	32 68749	32 69297	32 70848	32 74161
682	32 78890	32 84836	32 81397	32 79449	32 78107	32 78120	32 81071	32 75922
683	32 77031	32 80699	32 78028	32 77418	32 73322	32 73555	32 76014	32 82230
684	32 91968	33 04316	32 96356	32 92020	33 12184	33 10991	33 06258	33 12250
685	32 68367	32 61533	32 63973	32 67869	32 62813	32 63175	32 64371	32 46521
686	32 72590	32 72691	32 70868	32 71911	32 71221	32 71121	32 74572	32 64301
687	32 74306	32 77608	32 75261	32 73747	32 78014	32 77731	32 83059	32 80780
688	32 70955	32 71415	32 70014	32 69141	32 72040	32 71344	32 75851	32 71861
689	32 74356	32 81113	32 75210	32 71949	32 78634	32 77400	32 84118	32 81880
690	32 79256	32 89227	32 80753	32 77942	32 83122	32 82443	32 88256	32 85001
691	32 78698	32 87227	32 84590	32 79553	32 91083	32 89570	32 97902	32 99011
692	32 80205	32 90641	32 89580	32 82736	33 00595	32 98263	33 08079	33 09259
694	32 84030	32 95121	32 93313	32 86794	33 05195	33 03324	33 09393	33 04819
695	32 74814	32 70209	32 76095	32 77735	32 61727	32 62673	32 63556	32 59730
696	32 76246	32 70400	32 81048	32 81717	32 68476	32 69221	32 70216	32 67370
697	32 81941	32 85559	32 86845	32 85962	32 82015	32 82297	32 82527	32 90930
698	32 84940	32 91388	32 90298	32 88749	32 91979	32 91924	32 90723	32 90550
699	32 86085	32 92586	32 92339	32 90732	32 99164	32 98899	32 96056	32 94450
700	32 81232	32 82089	32 85722	32 86728	32 76159	32 76733	32 77145	32 78500
701	32 83989	32 87795	32 88457	32 88960	32 84339	32 84689	32 83827	32 88980
703	32 88047	32 93605	32 95052	32 94576	33 03243	33 03200	33 01787	33 01730
704	32 86819	32 90490	32 93058	32 93282	32 88884	32 89200	32 90235	32 90451
705	32 89037	32 96288	32 96048	32 95343	32 88181	32 88487	32 90257	32 86720
706	32 93233	33 04461	33 01031	32 98651	32 99637	32 99765	33 02392	32 98349
707	32 97550	33 13033	33 02984	33 00103	33 05373	33 05431	33 09047	33 04240
708	32 93107	33 03303	33 01347	32 98851	33 13128	33 13037	33 15215	33 16900
709	32 93189	33 00658	33 04375	33 02690	33 11780	33 11700	33 12076	33 16251
710	32 94787	33 07367	33 04676	33 02112	33 11508	33 11483	33 13624	33 14999
712	32 93621	33 01476	32 96787	32 95835	32 99875	32 99986	33 00605	33 00209
713	32 58189	32 46546	32 45864	32 52062	32 37847	32 39209	32 35841	32 33520
714	32 51953	32 37690	32 45085	32 52934	32 35217	32 36917	32 31864	32 40651

Tablo 2'nin devamı

Nok.	Ağırlıklı Ortalama Ent. (m)				Polinomlarla Ent. (m)		Multikua	GPS-Trig
No.	(1)	(2)	(3)	(4)	1.Derece	2.Derece		
715	32.55114	32.39204	32.47593	32.56712	32.38225	32.39907	32.35228	32.38650
716	32.58614	32.43853	32.52350	32.58459	32.48553	32.49441	32.46822	32.49000
717	32.59141	32.49702	32.49226	32.54230	32.44056	32.44952	32.42376	32.40500
718	32.63532	32.52389	32.58001	32.62538	32.56669	32.57101	32.56700	32.63551
719	32.61254	32.46413	32.54713	32.62136	32.50154	32.51220	32.48979	32.52740
721	32.68578	32.63876	32.65474	32.67372	32.66242	32.66122	32.68664	32.67520
723	32.57441	32.49421	32.47659	32.51975	32.42484	32.43296	32.40886	32.39670
724	32.67143	32.62856	32.65323	32.64919	32.66096	32.65503	32.67438	32.68260
725	32.82301	32.98992	32.82029	32.75433	32.88168	32.85927	32.94938	33.02199
727	32.82341	32.98211	32.85946	32.79265	32.94421	32.92148	33.03609	33.06378
730	32.81164	32.90294	32.94832	32.87715	33.11868	33.09168	33.16441	33.23120
731	32.79980	32.91359	32.84676	32.75538	32.93501	32.89988	32.87955	32.88011

Tablo 1.'de gösterilen 18 noktanın iki sistem arasındaki farkları esas alınarak yapılan interpolasyonlar sonucunda 94 nokta için hesaplanan tüm farklar Tablo 2.'de gösterilmektedir. Tablo 2'nin 1. sütunu enterpole edilen 94 adet noktanın numaralarını, 2., 3., 4. ve 5. sütunlar ağırlıklı aritmetik ortalamayla (ağırlıklar sırasıyla, $p_i = 1/s_i$, $p_i = 1/s_i^2$, $p_i = e^{(-s_i^2/k^2)}$ $k=3$ ve $p_i = e^{(-s_i^2/k^2)}$ $k=4$ alınmıştır) interpolasyondan bulunan farkları, 6. sütun 1.derece polinomla, 7.sütun 2. derece polinomla interpolasyondan bulunan farkları, 8. sütun ise multikvadrik interpolasyonla bulunan farkları göstermektedir. 9. sütunda GPS yükseklikleri ile trigonometrik nivelman yükseklikleri arasındaki farklar yer almaktadır.

Tablo 3. Sonuçların Değerlendirilmesinde Kullanılan Kriterler

Enterpolasyon Yöntemi	Standart Sapma (cm)	Maksimum Hata (cm)	Minimum Hata (cm)	Aritmetik Ort. (cm)	± 10 cm'den Büyük Hata Sayısı
Ağırlıklı Ort. (1)	± 18.55	41.96	0.02	15.48	57
Ağırlıklı Ort. (2)	± 10.24	32.83	0.04	8.15	31
Ağırlıklı Ort. (3)	± 11.40	28.29	0.07	9.06	36
Ağırlıklı Ort. (4)	± 14.76	35.41	0.02	12.47	51
1. Derece Polinom	± 5.61	16.86	0.08	4.04	8
2. Derece Polinom	± 5.47	17.33	0.07	4.15	7
Multikvadrik	± 5.19	17.85	0.06	4.06	4

GPS - Trigonometrik yükseklikler arasındaki farklar (Tablo 2., Sütun:9) kesin değer olarak kabul edilirse, enterpolasyonlarla bulunan farklar için hatalar elde edilebilir. Tablo 3'te yedi enterpolasyon sonucu için hesaplanan standart sapma, maksimum ve minimum hata, hataların aritmetik ortalama değerleri (mutlak değer olarak) ve 10 cm'den büyük hata sayısı verilmiştir.

Tablo 3'te verilen kriterlerin ışığı altında şu değerlendirmeler yapılabilir:

- Polinomlarla enterpolasyon ve multikvadrik enterpolasyon yöntemlerinin, ağırlıklı ortalama yöntemine göre 2-3 kat daha iyi sonuç verdiği vurgulanabilir.
- Birbirine yakın olmasına karşın, kullanılan datalara göre multikvadrik enterpolasyon sonuçlarının polinomlarla enterpolasyon sonuçlarından biraz daha iyi olduğu söylenebilir.
- Ağırlıklı ortalama sonuçları kendi içinde değerlendirildiğinde, ağırlık modellerinin (2), (3), (4), (1) sırasında iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.
- Çalışmada GPS - Trigonometrik yüksekliklerden bulunan farklar kesin değer olarak alınmış ve kriterler buna göre hesaplanmıştır. Trigonometrik nivelman ağı dengelenmesi sonucu bulunan yüksekliklerin standart sapmalarının yaklaşık $\sigma_t = \pm 3$ cm olduğu göz önüne alındığında, multikvadrik ve polinomlarla enterpolasyonlar sonucunda elde edilen maksimum hataların genel olarak bu değer 3 katı olan ± 10 cm'nin altında kaldığı söylenebilir.

KAYNAKLAR:

AYAN, T., BAYKAL, O., AKSOY A., DENİZ, R., BAZ, İ., ARSLAN, E., ŞAHİN M., COŞKUN, M. Z., İNCE, C. D., ÜSTÜNTAŞ, T., Zonguldak GPS Ağı Projesi Raporu, İTÜ. İnşaat Fak., Haziran 1996.

ERKANLI, Y., Koordinatlandırılmış Modelde veya Alanda, Enterpolasyon, Ekstrapolasyon Yöntemlerinin Uygulanması ve Neticeleri, Harita ve Kad. Müh. Dergisi, 56-57, 1986

- FIEDLER, J.**, Orthometric Heights From Global Positioning System, ASCE Journal of Surveying Engineering, Vol:118, No:3, August 1992.
- GÜLER, A.**, Sayısal Arazi Modellerinde Enterpolasyon Yöntemleri, Harita Dergisi, Sayı 85, 53-71, Ocak 1978
- GÜLER, A.**, Sayısal Arazi Modellerinde İki Enterpolasyon Yöntemi İle Denemeler, Harita ve Kadastro Müh. Dergisi, Sayı 52-53, 1985
- HARDY R. L.**, Multiquadratic Equations of Topography and Other Irregular Surfaces, Journal of Geophysical Research, Vol 76, No 8, 1971
- HARDY R. L.**, Analytical Topographic Surfaces By Spatial Intersection, P.E.R.S., 38, 5, 1972
- HARDY R. L.**, Research Results in The Application of Multiquadric Equations to Surveying and Mapping Problems, Surveying and Mapping, 321-332, December 1975
- HARDY, R. L.**, Theory and Applications of The Multiquadric-Biharmonic Method: 20 Years of Discovery 1968-1988, Computers Math. Applic., Vol 19, No 8/9, 163-208, 1990
- LEBERL, F.**, Interpolation In a Square Grid DTM, ITC Journal, 1973-75
- YANALAK, M.**, Sayısal Arazi Modellerinde Hacim Hesapları, Doktora Tez Çalışmaları, Henüz Yayınlanmadı.

*Adres: İTÜ. İnşaat Fak. Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Böl. Ölçme Tekniği Anabilim Dalı
80626 MASLAK/İST.*