

ÖZET

Çeşitli yöntemlerle kurulabilen sıklaştırma ağlarında uydu tekniklerinin kullanılması durumunda gerekli olan model verilmiştir. Ayrıca bağlantı (dayanak) noktalarının yeni ağ geometrisi ile uyumlu olup olmadığını araştırmak için bu noktaların istatistiksel testleri üzerinde durulduktan sonra 15 noktalı bir ağda uygulama yapılmıştır. Uygulamadan elde edilen sonuçlara göre söz konusu yöntemin sıklaştırma ağlarının oluşturulmasında kullanılabileceği görülmüştür.

1. GİRİŞ

İnsanoğlu yaşadığı sürece bir takım mühendislik hizmetleri ve mülkiyetle ilgili sorunlarının çözümü için sayısal ya da çizgisel haritalara olan gereksinimi devam edecektir. Yöntemi ne olursa olsun harita yapım projesinin temel faaliyetlerinden ilki jeodezik çalışmalardır. Bu nedenle sayısal ya da çizgisel haritası yapılacak bölgede bir jeodezik ağ kurulur. Söz konusu bölgenin haritası ilk defa yapılacaksa kurulacak ağ da ilk ağ olacaktır. Fakat günümüzde daha çok önceden kurulmuş ağların sıklaştırılması suretiyle üretilen büyük ölçekli haritalara gereksinim duyulmaktadır. Bir bölgede ilk kez bir ağ kurulacaksa bunun gerekli koşulları sağlanarak ağ oluşturulur. Bu yazıda bu konu kapsam dışı tutulup ağ sıklaştırması üzerinde durulacaktır. Sıklaştırma ağlarında yeni noktaların koordinatlarının üretilmesi yanında yeni ağ bölümünü eski ağa bağlayan ve bağlantı (dayanak) noktaları olarak adlandırılan noktaların eski ağ bölümüyle stokastik olarak uyumlu olması büyük önem taşımaktadır. Böylece yeni ve eski ağ bölümleri uyumlu olacak; dolayısıyla ağın tamamı homojen bir yapı gösterecektir.

Yeni kurulacak ağın (sıklaştırma ağının) bağlanacağı eski ağ, klasik ya da uydu yöntemleriyle kurulmuş olabilir. Günümüzde uydu teknikleri, özellikle GPS (Global Positioning System) teknolojisinin ağ sıklaştırmada kullanımı giderek yaygınlaşmaktadır. Mevcut (eski) ağ bölümüne ilişkin yöntem ile sıklaştırmada kullanılacak yöntem birbir uyumlu olmasa (eski ağ klasik yöntemle kurulmuş, sıklaştırma GPS yöntemiyle yapılmış olsa) bile farklı yöntemlerle kurulmuş olan ağların bütünleştirilmesi (entegrasyonu) olanaklıdır.

Bu çalışmada GPS ile ağ sıklaştırma modeli ve bağlantı noktaları için test yöntemleri açıklanmakta ve bir sayısal uygulama verilmektedir.

2. UYDU VERİLERİNİN AĞ SIKLAŞTIRMASINDA KULLANILMASI

Uydu gözlemlerinin değerlendirilmesi sonucunda elde edilen koordinatlar ile mühendislik hizmetlerinde kullanılan koordinatlar genel olarak farklı sistemlerdedir. Örneğin GPS tekniğiyle elde edilen koordinatlar WGS 84 (World Geodetic System 1984) sistemindeyken mühendislik hizmetlerinde kullanılan koordinatlar ülkeden ülkeye değişen ve genel olarak ülke sistemi adı verilen bir sistemde üretilmektedir. Bu nedenle sıklaştırma

ağlarında uydu teknikleri kullanılarak elde edilen koordinatların ülke sistemine dönüştürülmesi ve projelerde dönüştürülmüş koordinatların kullanılması gerekmektedir. Bu çalışmada uydu teknikleriyle elde edilen koordinatlardan WGS 84 koordinatları ve ülke koordinatlarından ED 50 (European Datum 1950) koordinatları anlaşılmaktadır.

WGS 84 koordinatlarından ED 50 koordinatlarına geçiş için başlıca üç yol vardır. Bunlar;

- Üç boyutlu uzayda WGS 84 koordinat sistemi ile ED 50 koordinat sistemi arasında, her iki sistemdeki eşlenik noktalar yardımıyla bir dönüşüm (benzerlik ya da afin dönüşümü) gerçekleştirerek sistemler arasındaki dönüşüm parametrelerini belirlemek ve bu parametrelerle eşlenik olmayan noktaların WGS 84 koordinatlarını ED 50 sistemine dönüştürmek,

- WGS 84 koordinatlarının ED 50 sistemindeki karşılıklarını iki sistem arasındaki dönüşüm parametreleri ile birlikte hesaplamak,

- Noktaların WGS 84 baz bileşenlerini (baz: iki nokta arasındaki uzunluk ve baz bileşeni: bu uzunluğa ait Δx , Δy , Δz koordinat farkları) ölçü olarak kullanmak ve ED 50 koordinatlarını hesaplamak

şeklinde özetlenebilir (Şimşek, 1995).

Yöntemlerden herbiri ayrı bir çalışma konusu olabileceğinden burada ilk iki yöntem üzerinde durulmayacak, sadece üçüncü yöntem açıklanacaktır.

2.1. WGS 84 Baz Bileşenlerinin Ölçü Olarak Kullanılması ve ED 50 Koordinatlarının Hesabı

Bir noktanın WGS 84 koordinatları $\underline{x}^s$ ile ED 50 koordinatları $\underline{x}$ arasındaki ilişki genel olarak 7 parametrelilik benzerlik dönüşümü bağıntısı,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^o \\ y^o \\ z^o \end{bmatrix} + (1+k)\underline{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^s \quad (1)$$

ile tanımlanır (Steeves, 1984).

Burada $\underline{R}$ iki sistemin birbirine karşılık gelen eksenleri arasındaki dönüklükleri gösteren ortogonal bir matristir. Çok küçük dönüklük açıları için $\underline{R}$ matrisi,

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

biçimindedir. Ayrıca;

x^0, y^0, z^0 : İki sistemin başlangıçlarını çakıştırmak için gerekli öteleme parametreleri (WGS 84'ün başlangıç noktasının ED 50 sisteminde koordinatları),
 α, β, γ : İki sistem arasındaki eksen dönüklükleri (sırayla x, y, z eksenleri etrafında),
 k : İki sistem arasındaki ölçek değişimi anlamındadır.

i ve j noktalarının koordinat farkları için (1) den,

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{ij} = (1 + k) \underline{R} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{ij}^s \quad (3)$$

çıkar (Fritzensmeier et al, 1985; Landau, 1986). Bu eşitliğin sağ yanındaki koordinat farklarının dengeli ölçüler ve sol yanındakilerin ülke sisteminde bilinmeyen koordinatların farkları anlamında olduğu düşünülürse Taylor'a göre doğrusallaştırma sonucunda

$$\begin{bmatrix} v_{\Delta x} \\ v_{\Delta y} \\ v_{\Delta z} \end{bmatrix}_{ij}^s = - \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}_j - \Delta \underline{U} r \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{ij}^s - \begin{bmatrix} l_{\Delta x} \\ l_{\Delta y} \\ l_{\Delta z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

fonksiyonel model (düzeltme denklemleri) elde edilir (Vincenty, 1987). Burada

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}_k, \quad k = i, j \quad \text{ve } x_o, y_o, z_o : \text{yaklaşık koordinatlar} \quad (5)$$

$$- \underline{l} = - \begin{bmatrix} l_{\Delta x} \\ l_{\Delta y} \\ l_{\Delta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_o \\ \Delta y_o \\ \Delta z_o \end{bmatrix}_{ij} - \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{ij}^s, \quad \begin{bmatrix} \Delta x_o \\ \Delta y_o \\ \Delta z_o \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}_i \quad (6)$$

$$\Delta \underline{U} r = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta z & \Delta y \\ \Delta z & 0 & -\Delta x \\ -\Delta y & \Delta x & 0 \end{bmatrix}^s \quad (7)$$

biçimindedir.

Matematiksel modelin stokastik bileşeni (ölçülerin varyans-kovaryans matrisi) uydu gözlemlerinin değerlendirme yöntemine bağlı olarak çeşitli şekillerde belirlenebilir.

Uydu gözlemleri bazlar şeklinde değerlendirilirse bir noktanın baz bileşenleri korelasyonlu olacaktır. Baz bileşenlerinin varyans-kovaryans matrisi $\underline{C}_i$, kofaktör matrisi $\underline{Q}_i$ ve birim ağırlıklı önsel (a priori) standart sapma σ_i ile gösterilirse ağırlık matrisi $\underline{P}_i$,

$$\underline{P}_i = \sigma_i^2 \underline{C}_i^{-1} = \underline{Q}_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

olur. Modelin tamamına ilişkin $\underline{P}$ ağırlık matrisi, köşegeni üzerinde bazlara ilişkin 3×3 boyutunda $\underline{P}_i$ ağırlık matrisleri bulunan ve diğer elemanları sıfır olan

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & 0 \\ 0 & \underline{P}_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

biçimindedir.

Uydu gözlemleri gruplar halinde değerlendirilirse bir gruptaki baz bileşenleri korelasyonlu olacağından (9) ile verilen ağırlık matrisinin köşegeni üzerinde grup çözümlerinden elde edilen alt matrisler bulunacak ve diğer elemanlar sıfır olacaktır.

Bir kampanyaya ilişkin tüm gözlemlerin birlikte değerlendirildiği genel çözüm sonucunda tüm bazlar korelasyonlu olacağından modelin ağırlık matrisi genel olarak elemanları sıfırdan farklı dolu bir matris olur.

Buraya kadar dik koordinatlarla modellendirme üzerinde duruldu. Hesaplamalar elipsoidal koordinat sisteminde yürütülmek istenirse (4) eşitliğiyle verilen fonksiyonel modelde geçen katsayıların elipsoidal sisteme dönüştürülmesi gerekir. Bu dönüşüm global jeodezik ve elipsoidal koordinat sistemleri arasında geçerli olan

$$\begin{aligned} x &= (N + h) \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ y &= (N + h) \cos \varphi \cdot \cos \lambda \end{aligned} \quad (10)$$

$$z = \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi = [(1 - e^2) N + h] \sin \varphi$$

bağıntıları yardımıyla gerçekleştirilir (Wolf, 1963; Arslan, 1987; Moritz, 1978; Merry-Vanicek, 1974; Dragomir et al, 1982). Burada φ , λ , h simgeleri sırayla elipsoidal enlem, boylam ve elipsoit yüksekliğini; x, y, z ise jeodezik dik koordinatları göstermektedir. Ayrıca, a, b : elipsoide ilişkin büyük ve küçük yarı eksen uzunlukları, N : meridyene dik doğrultudaki eğrilik yarıçapı ve e^2 : birinci dış merkezlik olmak üzere

$$N = a / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (11)$$

$$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2 \quad (12)$$

dir. (10) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\varphi, \lambda, h) \\ y(\varphi, \lambda, h) \\ z(\varphi, \lambda, h) \end{bmatrix} \quad (13)$$

biçiminde yazılır, toplam diferansiyel kuralı uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \underline{T} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} \quad (14)$$

elde edilir. Burada kısmi türevleri içeren $\underline{T}$ matrisi,

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ve elemanları;

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -(M+h) \sin \varphi \cos \lambda & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -(M+h) \sin \varphi \sin \lambda \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= (M+h) \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -(N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= (N+h) \cos \varphi \cos \lambda & \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial h} &= \cos \varphi \cos \lambda & \frac{\partial y}{\partial h} &= \cos \varphi \sin \lambda & \frac{\partial z}{\partial h} &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (16)$$

dir. (Ehlert, 1991; Eissfeller et al, 1985; Landau, 1986, Şimşek,1995). (16) eşitliklerinde geçen M , meridyen eğrilik yarıçapıdır (Ulsoy, 1977):

$$M = a(1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \quad (17)$$

(14) eşitliği (4) de yerine konursa elipsoidal sistemde fonksiyonel model (düzeltme denklemleri),

$$\begin{bmatrix} v_{\Delta x} \\ v_{\Delta y} \\ v_{\Delta z} \end{bmatrix}_s = -\underline{T}_i \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}_i + \underline{T}_j \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}_j - \Delta \underline{U} r \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{ij} - \begin{bmatrix} l_{\Delta x} \\ l_{\Delta y} \\ l_{\Delta z} \end{bmatrix} \quad (18)$$

elde edilir.

(4) ya da (18) modeli genel olarak matrislerle

$$\underline{v} = \underline{A}\hat{\underline{x}} - \underline{l} \quad , \quad \text{Ağırlık matrisi } \underline{P} \quad (19)$$

gösterilirse en küçük kareler yöntemiyle çözüm için normal denklemler,

$$\underline{N}\hat{\underline{x}} - \underline{n} = 0 \quad (\underline{N} = \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \quad , \quad \underline{n} = \underline{A}^T \underline{P} \underline{l}) \quad (20)$$

bilinmeyenler ve ağırlık katsayıları matrisi,

$$\hat{\underline{x}} = \underline{N}^{-1} \underline{n} \quad , \quad \underline{Q}_{\hat{\hat{x}}} = \underline{N}^{-1} \quad (21)$$

elde edilir. Tüm noktalar bilinmeyen olarak öngörülürse (21) deki Cayley invers $\underline{N}^{-1}$ yerine pseudo invers $\underline{N}^+$ geçerli olur (Ayan, 1981).

Birim ağırlıklı ölçünün sonsal (a posteriori) standart sapması $\hat{\sigma}$ ile bilinmeyenlerin varyans-kovaryans matrisi $\underline{C}_{\hat{\hat{x}}}$,

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{P} \underline{v}}{n - u + d}} \quad , \quad \underline{C}_{\hat{\hat{x}}} = \hat{\sigma}^2 \underline{Q}_{\hat{\hat{x}}} \quad (22)$$

ile hesaplanır. Burada n , ölçü sayısı, u , bilinmeyen sayısı (dönüşüm parametreleri dahil), d , datum defektidir. Bilinmeyenlerin varyansları $(\hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_z^2)$, $\underline{C}_{\hat{\hat{x}}}$ matrisinin köşegen elemanlarına eşittir.

Dengeli ölçüler ve ağırlık katsayıları matrisi ile düzeltmelerin ağırlık katsayıları matrisi sırayla

$$\hat{\underline{l}} = \underline{l} + \underline{v} = \underline{A}\hat{\underline{x}} \quad , \quad \underline{Q}_{\hat{\hat{l}}} = \underline{A} \underline{Q}_{\hat{\hat{x}}} \underline{A}^T \quad , \quad \underline{Q}_{\underline{w}} = \underline{P}^{-1} - \underline{Q}_{\hat{\hat{l}}} \quad (23)$$

olarak bulunur.

φ enleminde λ_1 ve λ_2 boylam değerleri ile sınırlı bir paralel daire yayı uzunluğu S_p ile φ_1 ve φ_2 enlemleri ile sınırlı bir meridyen yayı uzunluğu S_m (45 km den kısa yay) için

$$S_p = \frac{\Delta \lambda}{\rho} N \cdot \cos \varphi \quad , \quad S_m = \frac{\Delta \varphi}{\rho} M \quad (24)$$

eşitlikleri geçerlidir (Özbenli, 1991; DMA technical report, part I, 1987). Burada $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ dir.

Bir P noktasının konum hatası

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2} \quad (25)$$

dir.

Hesaplamalar elipsoidal sistemde yürütülüyorsa (22) bağıntısındaki $\underline{C}_{\hat{x}\hat{x}}$ matrisinden elde edilecek $\hat{\sigma}_\varphi$ ve $\hat{\sigma}_\lambda$ standart sapmaları açı biriminde olacaktır. Bu büyüklükler (24) eşitliği yardımıyla uzunluk birimine dönüştürülebilir ve bu dönüştürme sonucunda nokta konum hataları yine (25) bağıntısıyla hesaplanabilir. Ya da bir P noktasının konum hatası (14) e hata yayılma kuralı uygulanarak

$$\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \underline{T} \underline{Q}_{\varphi\varphi} \underline{T}^T \text{ ile } \hat{\sigma}_p = \hat{\sigma} \sqrt{\text{iz}(\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}})} \quad (26)$$

elde edilir.

Dengeleme hangi sistemde yapılırsa yapılsın sonuçta uzayda nokta konum doğruluğunu tanımlayabilmek için Helmert hata elipsoidi ya da güven elipsoidinin elemanlarını da hesaplamak olanaklıdır (Şimşek, 1995; Wolf, 1975).

Ülke haritalarının üretiminde ve çeşitli mühendislik projelerinde kullanılan yatay konum koordinatları ve yükseklikler farklı referans sistemlerine dayalı olarak ayrı ayrı belirlenmektedir. Yatay konum koordinatları, Gauss-Krüger koordinatları (x,y) ya da bunların değiştirilmiş biçimi olan sağa ve yukarı değerlerdir. Bunlardan coğrafi koordinatlar olarak da bilinen elipsoidal koordinatlara (elipsoidal enlem φ ve elipsoidal boylam λ) geçmek olanaklıdır (Aksoy-Güneş, 1990). Yükseklik olarak da genellikle ortometrik yükseklikler (H) kullanılmaktadır.

Üç boyutlu WGS 84 koordinatlarıyla iki boyutlu ED 50 koordinatları ve yükseklik bilgisi arasında bağlantı kurabilmek için ED 50 koordinatları yardımıyla noktaların enlem ve boylamları (φ, λ) ve N jeoit yükseklikleri yardımıyla elipsoit yükseklikleri (h)

$$h = H + N \quad (27)$$

belirlenir. Bu işlemin ardından φ, λ, h elipsoidal koordinatları (10) bağıntıları ile ülke sisteminde jeodezik dik kordinatlara dönüştürülür. Artık (4) ya da (18) modeli için gerekli olan küçültülmüş ölçüler (6) bağıntısıyla hesaplanabilir. (4) ya da (18) modelinin kullanılması sonucunda ED 50 sistemine dönüştürülmüş dik koordinatlar ya da φ, λ, h elipsoidal koordinatları bulunur. φ, λ enlem ve boylamından Gauss-Krüger koordinatlarına bilinen bağıntılar yardımıyla kolayca geçilebilir. Sorun, belirlenen h elipsoit yüksekliklerinin projelerde doğrudan kullanılamamasıdır. Bu nedenle uygulama için H ortometrik yüksekliklerinin hesaplanması gerekmektedir.

2.2. Ortometrik Yüksekliklerin Belirlenmesi

Sıklaştırma ağının bulunduğu bölgede ED 50 datumunda jeoit belirlenmişse (27) den H ortometrik yükseklikleri

$$H = h - N \quad (28)$$

çıkar (Liddle, 1989).

Sıklaştırma bölgesinde ED 50 datumunda ya da ED 50 datumuna dönüştürülebilecek herhangi bir datumda jeoit yükseklikleri yerine jeoit yükseklik farkları ve en az bir noktanın ortometrik yüksekliği belirli ise ortometrik yükseklikler hesaplanabilir. (28) den i ve j gibi iki nokta için

$$\Delta h_{ij} = h_j - h_i, \quad \Delta H_{ij} = H_j - H_i, \quad \Delta N_{ij} = N_j - N_i \quad (29)$$

olmak üzere

$$\Delta H_{ij} = \Delta h_{ij} - \Delta N_{ij} \quad (30)$$

elde edilir (Sideris, 1990; Hein, 1989, Sideris, Schwarz, 1986).

Δh_{ij} , (4) ya da (18) modeline dayanan dengeleme sonucunda hesaplanan elipsoit yükseklikleri farkıdır. Ancak ΔN_{ij} jeoit yüksekliği farkları dengeli değerler olmadığından (30) ile hesaplanan ΔH_{ij} ortometrik yükseklik farkları dengelenmesi gereken değerlerdir. Bu değerler ölçüler gibi düşünülerek nivelman ağı dengelemesi uygulanabilir. Dengelemenin fonksiyonel modeli (29) dan

$$v_{ij} = -dH_i + dH_j + (H_j^o - H_i^o - \Delta H_{ij}) \quad (31)$$

elde edilir. Burada H_i^o, H_j^o yaklaşık ortometrik yüksekliklerdir. Genel gösterimle dengeleme modeli

$$\underline{v} = \underline{A}\underline{\hat{x}} - \underline{l}, \quad \text{Ölçülerin } (\Delta H_{ij}) \text{ ağırlık matrisi } \underline{P} \quad (32)$$

olur.

(32) de verilen $\underline{P}$ ağırlık matrisi (30) bağıntısına hata yayılma kuralı uygulanarak belirlenebilir. Δh_{ij} ve ΔN_{ij} büyüklükleri arasında korelasyon olmadığı varsayılırsa ΔH_{ij} ortometrik yükseklik farkının varyansı için

$$\sigma_{\Delta H_{ij}}^2 = \sigma_{\Delta h_{ij}}^2 + \sigma_{\Delta N_{ij}}^2 \quad (33)$$

yazılabilir. Elipsoidal yükseklik ve jeoit yüksekliği farklarının varyansları (29) dan

$$\sigma_{\Delta hij}^2 = \sigma_{hj}^2 + \sigma_{hi}^2 - 2\sigma_{hihj} \quad (34)$$

$$\sigma_{\Delta Nij}^2 = \sigma_{Nj}^2 + \sigma_{Ni}^2 - 2\sigma_{NiNj} \quad (35)$$

çıkar. Elipsoit yükseklikleri dengeleme ile hesaplandığından elipsoit yüksekliklerine ilişkin varyans ve kovaryanslar bellidir. Jeoit yüksekliklerine ilişkin varyanslar da jeoit yüksekliklerinin hesabı sırasında belirlenebilir.

Varyanslar belirlendikten sonra seçilecek bir σ^2 varyans faktörü ile ağırlıklar

$$P_{\Delta Hij} = \sigma^2 / \sigma_{\Delta Hij}^2, \quad (i,j=1,2,\dots,n) \quad (36)$$

elde edilir.

3. SIKLAŞTRMA AĞLARINDA İSTATİSTİK TESTLER

Dengelemenin matematiksel modeli gerçeğe uygun oluşturulmalıdır. Aksi durumda ortaya çıkan model hataları dengeleme sonuçlarını etkiler. Bu nedenle model hatası olup olmadığı araştırılmalıdır.

3.1. Model Hipotezinin Test Edilmesi

Matematiksel modelin fonksiyonel bileşeninin ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkileri ve stokastik bileşeninin ölçülerin stokastik özelliklerini tam ve doğru olarak tanımladığını varsayan model hipotezi önsel varyans faktörü σ^2 ile sonsal varyans faktörü $\hat{\sigma}^2$ karşılaştırılarak test edilir. Varyanslar için

$$T = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim F_{r,\infty,1-\alpha} = (X_{r,1-\alpha}^2) / r \quad (37)$$

dağılımı geçerlidir (Şimşek,1992). Burada $r = n - u + d$ sonsal varyans için; ∞ ise önsel varyans için serbestlik derecesi ve α yanılma olasılığıdır. (37) test büyüklüğü (T), F-dağılımının sınır değerinden küçük ($T < F_{r,\infty,1-\alpha}$) çıkarsa model hatası olmadığı, aksi durumda model hipotezinin geçersiz ya da uyumsuz ölçü olduğu yargısına varılır.

3.2. Uyuşumsuz Ölçü Testi

Model hipotezini geçersiz kılabilen uyumsuz (kaba hatalı) ölçüler data-snoping, tau ve t-testlerinden herhangi biriyle ortaya çıkarılabilir. Hipotez, “kaba hatalı (uyumsuz) ölçü yoktur” biçiminde öngörülür.

Herhangi bir i ölçüsüne ilişkin düzeltme v_i , düzeltmelerin kofaktörler matrisi (Q_{vv}) nin i nci köşegen elemanı q_{vvi} , önsel ve sonsal standart sapmalar sırayla σ ve $\hat{\sigma}$ ile gösterilirse Baarda (data-snoping) testi için

$$T_i = \frac{|v_i|}{\sigma \sqrt{q_{vivi}}} \sim N(0,1) \quad (38)$$

ve tau-testi için

$$T_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma} \sqrt{q_{vivi}}} \sim \tau_r \quad (39)$$

test büyüklükleri geçerlidir (Aksoy, 1984; Ayan 1992; Demirel, 1987a).

Test edilecek i nci ölçü dışında kalan diğer ölçülerle bulunacak sonsal standart sapma $\hat{\sigma}_i$ olmak üzere t-testi için

$$T_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_i \sqrt{q_{vivi}}} \sim t_{r-1} \quad , \quad \left(\hat{\sigma}_i^2 = \frac{[P.v.v] - \frac{v_i^2}{q_{vivi}}}{r-1} \right) \quad (40)$$

test büyüklüğü t- dağılımlıdır.

(38), (39) ya da (40) test büyüklüğü öngörülen yanılma olasılığı ve serbestlik derecesine bağlı olarak ilgili dağılımın sınır değerinden büyük çıkarsa söz konusu ölçünün uyumsuz olduğu yargısına varılır.

3.3. Bağlantı (Dayanak) Noktalarının Test Edilmesi

Bağlantı noktalarının dengeleme sonucu bulunan koordinatlarının mevcut (verilen) koordinatlarla karşılaştırılabilmesi için serbest (ya da zorlamasız) dengeleme sonuçlarının bağlantı noktaları datumu belirleyecek şekilde kısmi iz minimum çözümüne dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu iş bir S-transfomasyonu ile gerçekleştirilebilir (Demirel, 1987b).

Bağlantı noktaları için, “bağlantı noktalarının dengeleme ile bulunan koordinatları, istatistiksel anlamda, verilen koordinatlarına eşittir” biçiminde öngörülen hipotez test edilmelidir.

Bağlantı noktalarının verilen koordinatları $\tilde{x}_1$ ve bağlantı noktaları datum noktaları olduğuna göre yapılan dengeleme (kısmi iz minimum) sonucunda elde edilen koordinatları $\hat{x}_1$, ve bunların kofaktörler matrisi $\underline{Q}_{\hat{x}_1\hat{x}_1}$ olsun. h sayıdaki bağlantı noktalarının tamamına ilişkin global test için test büyüklüğü,

$$T = \frac{(\hat{x}_1 - \tilde{x}_1)^T \underline{Q}_{\hat{x}_1\hat{x}_1}^{-1} (\hat{x}_1 - \tilde{x}_1)}{h \hat{\sigma}^2} \sim F_{h,r} \quad (41)$$

ile hesaplanabilir (Koch, 1983). Burada $\hat{\sigma}^2$ sonsal varyans faktörüdür. Bu test büyüklüğü öngörülen α anlamlılık düzeyine göre F-dağılımının sınır değerinden büyük ($T > F_{h,r,1-\alpha}$) çıkarsa bağlantı noktaları kümesinde uyumsuz nokta ya da noktalar bulunduğu karar verilerek bunların araştırılmasına geçilir. Uyumsuzluğa hangi koordinat ya da koordinatların neden olduğunu ortaya çıkarabilmek için nokta koordinatları birer birer, ikiye ikiye ya da her üç koordinat birlikte test edilebilir.

Koordinatların teker teker testi (örneğin x) için (41) den

$$T_1 = \frac{(\hat{x}_i - \tilde{x}_i)^2}{\hat{\sigma}^2 q_{xixi}} \sim F_{1,r} \quad (i=1,2,\dots,h) \quad (42)$$

biçiminde test büyüklüğü elde edilir. Benzer olarak y,z koordinatları da test edilebilir.

Bir noktanın iki koordinatının birlikte testi (örneğin x, y) için

$$T_2 = \frac{\begin{bmatrix} \hat{x}_i - \tilde{x}_i \\ \hat{y}_i - \tilde{y}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{xixi} & q_{xyiy} \\ q_{yixi} & q_{yyiy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_i - \tilde{x}_i \\ \hat{y}_i - \tilde{y}_i \end{bmatrix}}{2\hat{\sigma}^2} \sim F_{2,r} \quad (43)$$

bulunur (Aksoy, 1987; Koch, 1983). Benzer olarak x,z ve y,z koordinat çiftleri de test edilebilir.

Üç koordinatın birlikte testi için test büyüklüğü

$$T_3 = \frac{\begin{bmatrix} \hat{x}_i - \tilde{x}_i \\ \hat{y}_i - \tilde{y}_i \\ \hat{z}_i - \tilde{z}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{xixi} & q_{xyiy} & q_{xizi} \\ q_{yixi} & q_{yyiy} & q_{yizi} \\ q_{zixi} & q_{zyiy} & q_{zizi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_i - \tilde{x}_i \\ \hat{y}_i - \tilde{y}_i \\ \hat{z}_i - \tilde{z}_i \end{bmatrix}}{3\hat{\sigma}^2} \sim F_{3,r} \quad (44)$$

olur. Test büyüklüklerinin hesabı için yeni dengelemeye gerek olmaksızın (41) global testindeki $\hat{x}_i$ vektörü ve $\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}_i}$ matrisinin test edilecek noktaya ilişkin alt elemanları kullanılır. Test büyüklükleri öngörülen α yanılma olasılığına göre ilgili dağılımların sınır değerlerinden büyük

$$T_1 > F_{1,r,1-\alpha} ; \quad T_2 > F_{2,r,1-\alpha} ; \quad T_3 > F_{3,r,1-\alpha} \quad (45)$$

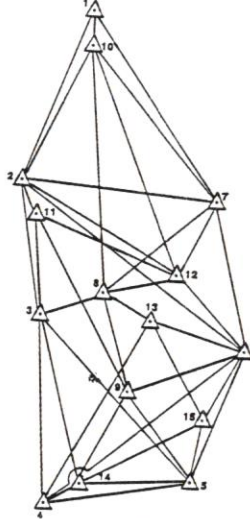
çıkarsa incelenen koordinat ya da koordinatların uyumsuz olduğu karar verilir.

(42),(43) ve (44) test büyüklükleri dengelemenin (x,y,z) sisteminde yapılması durumunda geçerlidir. Hesaplamalar (ϕ , λ , h) sisteminde yürütülüyorsa bu testleri kullanabilmek için sistemin kofaktörler matrisi $\underline{Q}_{\phi\phi}$, (x,y,z) sisteminin $\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ matrisine dönüştürülmelidir (Şimşek, 1995).

4. UYGULAMA

Uygulama alanı olarak Ankara GPS test ağının 15 noktası seçilmiştir. Bu 15 noktada GPS gözlemlerinin değerlendirilmesi sonucunda elde edilen bağımsız 40 baz (120 baz bileşeni) ölçü olarak alınmıştır. Ölçü planı şekil 1 de görülmektedir.

(4) ya da (18) ile verilen modelde koordinat bilinmeyenleri yanında 3 dönüklük ve 1 ölçek faktörü olmak üzere 4 dönüşüm parametresi vardır. 120 ölçü ve 49 bilinmeyen (45 koordinat + 4 parametre) olan serbest dengeleme için defekt sayısı 7 ve serbestlik derecesi 78 dir.



Şekil 1: Ölçü Planı

Uygulama aşağıda özetlenen adımlarda yürütülmüştür.

(a) Baz bileşenlerinin hesabı sırasında standart sapmaları da belirlenmiştir. Bunlar ölçülerin önsel standart sapmaları olarak öngörülmüştür. Birim ağırlıklı ölçünün önsel standart sapması için tüm ölçülerin standart sapmalarının ortalaması ($\sigma = 0.0103$ m) alınmıştır. Dengelemede ölçüler korelasyonsuz kabul edilmiştir. Sonuçta birim ağırlıklı ölçü için sonsal standart sapma $\hat{\sigma} = 0.01213$ m bulunmuştur. (37) bağıntısına göre model hipotezi test edilmiş ve geçersiz olduğu görülmüştür. Buna uyumsuz ölçülerin neden olduğu düşünülerek (39) bağıntısına göre yapılan uyumsuz ölçü araştırmasında 1 den 10 nolu noktaya olan bazın Δy bileşeninin uyumsuz olduğu belirlenmiştir. Bu ölçü atılarak yinelenen dengelemede $\hat{\sigma} = 0.01118$ m hesaplanmıştır. Model hipotezinin testi için test büyüklüğü $T = 1.177 < F_{77,\infty,0.95} = 1.279$ olduğundan model hipotezi geçerli bulunmuştur.

(b) Daha sonra aşda 1,4,5,9 noktalarının sabit alınabileceği düşünülerek bu noktalar bağlantı noktaları olarak öngörülmüş ve bu noktalara göre ağı kısmi iz minimum çözümü elde edilmiştir.

(c) Kısmi iz minimum çözümü ile bağlantı noktalarına göre konumlandırılan ağda bağlantı noktalarına ($h=12$ koordinat) (41) bağıntısına göre global test uygulanmıştır. Bu uygulamada $\hat{\sigma} = 0.01118$, serbestlik derecesi $r = 77$ ve yanılma olasılığı $\alpha = 0.05$ dir. Buna göre $F_{12,77,0.95} = 1.880$ ve $T = 5.944$ hesaplanmış ve global test hipotezi geçersiz çıkmıştır. Bu geçersizliğe hangi noktaların neden olduğu (44) ile araştırılmıştır. İlgili dağılımın sınır değeri $F_{3,77,0.95} = 2.72$ dir. Test büyüklükleri çizelge 1 de sergilenmiştir.

Çizelge 1: Nokta testi için test büyüklükleri

Nok.No	x-y-z koordinatları İçin	
	T	Hipotez
1	19.73	ret
4	20.51	ret
5	20.90	ret
9	23.11	ret

Çizelge 1 incelendiğinde hiçbir noktanın bağlantı için uygun olmadığı görülmektedir. Bu durumda en büyük test büyüklüğüne sahip olan noktanın bağlantı noktaları kümesinden çıkarılarak testin yinelenmesi düşünülmüştür. Böylece 9 nolu nokta bağlantı noktaları kümesinden çıkarılmış ve 1,4,5 nolu noktalarla hesaplamaların (b) ve (c) adımları tekrarlanmıştır.

(41) global hipotez testi için $r = 77$, $h = 9$ ve $\hat{\sigma} = 0.01118$ ile $T = 0.132$ ve $F_{9,77,0.95} = 2.004$ bulunmuştur. Buna göre $T < F$ olduğundan hipotez geçerli; başka bir deyişle bağlantı noktaları olarak öngörülen nokta koordinatları sabit alınarak ağıın dayalı dengelenebileceği sonucuna varılmıştır.

Global test geçerli olmasına karşın (44) ile nokta testi yinelenmiş olup elde edilen test büyüklükleri çizelge 2 de sergilenmiştir.

Çizelge 2 : Nokta testi için test büyüklükleri (Yinelenen hesap sonucu)

Nok.No	x-y-z koordinatları için	
	T	Hipotez
1	0.3933	kabul
4	0.3972	kabul
5	0.3969	kabul

Çizelge 2 incelendiğinde tüm test büyüklüklerinin ilgili F-dağılımının sınır değerinden küçük kaldığı görülmektedir.

(d) ED 50 datumunda jeoit belli olmadığından test edilen 3 noktanın elipsoit yükseklikleri ortometrik yüksekliklerine eşit ($h=H$) ve noktalar sabit alınarak ağ dayalı olarak hem (x, y, z) hem de (φ, λ, h) sisteminde dengelenmiştir.

Dengelemede 40 bilinmeyen (36 koordinat + 4 parametre), 119 ölçü (uyuşumsuz ölçü atıldı) ve birim ağırlıklı önsel standart sapma 0.0103 m alınmıştır. Serbestlik derecesi 79 dur. Dengeleme sonucunda birim ağırlıklı sonsal standart sapma 0.01112 m bulunmuştur.

(37) bağıntısından $T = 1.165$ hesaplanmış, $F_{79, \infty, 0.95} = 1.276$ ve buna göre $T < F$ nedeniyle model hipotezi geçerli kabul edilmiştir.

Dengeleme ile hesaplanan dönüşüm parametreleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}\alpha &= -2.00986'' \pm 0.04296'' \\ \beta &= 2.92465'' \pm 0.04227'' \\ \gamma &= 1.45288'' \pm 0.05573'' \\ k &= 3.567 \text{ ppm} \pm 0.135 \text{ ppm}\end{aligned}$$

Yeni noktaların hesaplanan enlem, boylamları ile mevcut enlem, boylamlarının farkları alınmış ve (24) bağıntısına göre uzunluğa çevrilerek çizelge 3 de verilmiştir.

(e) Dengelemenin (d) işlem adımı sonunda elde edilen elipsoit yükseklikleri ve bilinen jeoit yükseklikleri kullanılarak (30) bağıntısına göre ortometrik yükseklik farkları hesaplanmıştır. Bu farklar ölçüler olarak alınmış ve (36) bağıntısıyla da ağırlıklar belirlenerek nivelman ağı dengelemesi yapılmıştır. Bu dengelemede ölçü sayısı $n = 40$, üç nokta sabit alındığından (üç noktanın da sabit alınma zorunluluğu yoktur, bir tane sabit almak yeterlidir) bilinmeyen sayısı $u = 12$ ve serbestlik derecesi $r = 28$ dir. Dengelemede sonsal standart sapma 5.4 cm bulunmuştur. Noktaların dengeleme ile hesaplanan ortometrik yükseklikleri ile mevcut yüksekliklerinin farkları belirlenerek çizelge 3 de verilmiştir.

Çizelge 3 : Dengeli enlem, boylam ve ortometrik yükseklikler ile mevcut enlem, boylam ve ortometrik yüksekliklerin farkları (dengeli-mevcut)

Nokta No	$\Delta\phi$ (cm)	$\Delta\lambda$ (cm)	ΔH (cm)
2	0.34	-0.17	-10.5
3	-0.06	0.64	-10.3
6	-0.03	-0.24	15.2
7	-0.68	-0.14	11.4
8	0.28	0.36	-2.3
9	0.43	-0.26	-0.2
10	2.10	0.29	-3.2
11	0.77	0.00	-17.4
12	0.09	0.10	10.1
13	0.43	-0.12	6.9
14	0.71	0.21	-4.0
15	0.62	-0.14	7.7
Ort.	0.42	0.04	0.28
S.S.	0.66	0.28	10.09

S.S. : Standart Sapma

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Ağ sıklaştırması amacıyla GPS baz vektörü bileşenleri ölçüler olarak alınıp serbest dengeleme ve model hipotez testi yapılmıştır. Daha sonra uyumsuz ölçüler ayıklanmış ve sıklaştırma ağı bağlantı noktalarına göre konumlandırılarak bağlantı noktaları test edilmiştir.

Test sonucunda belirlenen noktalara göre ağı dayalı olarak dengelenerek noktaların ED 50 datumunda enlem, boylam ve elipsoit yükseklikleri ile nokta konum hataları ve ED 50-WGS 84 sistemleri arasında 4 adet dönüşüm parametresi hesaplanmıştır. Daha sonra mevcut jeoit yükseklikleri ve hesaplanan elipsoit yükseklikleri yardımıyla ortometrik yükseklik farkları oluşturulmuş ve bu farklar ölçüler anlamında dengelemeye sokularak noktaların ortometrik yükseklikleri hesaplanmıştır.

Noktaların (25) bağıntısına göre hesaplanan konum hataları 0.83 cm ile 1.24 cm arasında değişmekte ve ortalaması 0.97 cm dir.

Hesaplar sonucu noktaların dengelenmiş enlem, boylam ve ortometrik yükseklikleri mevcut değerleriyle karşılaştırılmıştır (çizelge 3). Dengelenmiş değerler ile mevcut değerler arasındaki farklar enlemde -0.68 cm ile 2.10 cm arasında; boylamda -0.26 cm ile 0.64 cm arasında; ortometrik yükseklikte -17.4 cm ile 15.2 cm arasında değişmektedir. Enlem, boylam ve ortometrik yükseklik farklarının ortalamaları sırayla 0.42 cm, 0.04 cm, 0.28 cm ve standart sapmaları da 0.66 cm, 0.28 cm, 10.09 cm dir.

Uygulanan yöntemle nokta konum hatalarının ve yatay koordinatların yaklaşık 1 cm, ortometrik yüksekliklerin ise yaklaşık 10 cm bir doğrulukla belirlenebileceği görülmüştür. Bu doğruluklar klasik ağı sıklaştırmasında öngörülen değerleri sağlamaktadır. Bu nedenle yöntem bölgesel ağı sıklaştırmalarında rahatlıkla kullanılabilir.

Yöntemin uygulanabilmesi için ölçü olarak GPS baz vektörleri, bağlantı noktalarının ED 50 datumunda koordinatları ve en az bir noktanın ortometrik yüksekliği ile uygulama alanı için belirlenmiş bir jeoit yeterlidir.

Fonksiyonel modelde geçen dönüşüm parametreleri için bulunan sayısal değerler yalnızca uygulama bölgesi için geçerlidir, genelleştirilemez.

KAYNAKLAR

1. Aksoy, A.(1984) : Uyuşumsuz Ölçüler Testi. Harita Dergisi, Sayı:93.
2. Aksoy, A.(1987) : Jeodezik Değerlerin Matematik-İstatistik Testlerle İrdelenmesi. Türkiye I. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, 23-27 Şubat, Ankara.
3. Aksoy, A.;Güneş, İ.H. : Jeodezi II. İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, (1990) Sayı: 1422.
4. Arslan, E.(1987) : Ülke Nirengi Ağlarında İki ve Üç Boyutlu Dengeleme Modellerinin Uygulamalı Karşılaştırılması. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
5. Ayan, T.(1981) : Jeodezik Ağların Optimizasyonu. Doçentlik Tezi. İTÜ İnşaat Fakültesi, İstanbul, 1981.
6. Ayan, T.(1992) : Uyuşumsuz Ölçüler Testi. Harita ve Kadastro Mühendisliği, Sayı: 172.

7. Demirel, H.(1987a) : Nirengi Ağlarının Dengelenmesi ve Sonuçların Test Edilmesi. Harita Dergisi, Sayı: 98.
8. Demirel, H.(1987b) : S-Transformasyonu ve Deformasyon Analizi. Türkiye I. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, 23-27 Şubat, Ankara.
9. DMA Technical Report, : Supplement to Department of Defense. World Geodetic
Part I,(1987) System 1984 Technical Report: Part I.Methods,
Techniques, and Data Used in WGS 84 Development ;
DMA TR 8350. 2-A. The Defense Mapping Agency,
Washington, DC; 1 December 1987.
10. Dragomir, V.C.; Ghitau, : Theory of the Earth's Shape. Elsevier Scientific Publishing
D.N.;Mihailescu, M.S.; Company, Amsterdam-Oxford- New York.
Rotaru, M.G.(1982)
11. Ehlert, D.(1991) : Differentielle Verschiebungen und Drehstreckungen in
dreidimensionalen Koordinatensystemen. Deutsche
Geodätische Kommission (DGK), Reihe B, Heft Nr: 295.
12. Eissfeller, B.; Landau, : The Processing of GPS Baseline Vectors in Conventional
H.; Hein, G.W.; Bottse, Geodetic Networks Using Gravity Field Information and
A.D.(1985) Least Squares Collocation. 7th International Symposium
on Geodetic Computations. Cracow, June 1985.
13. Fritzensmeier, K.; Kloth, : Simulation Studies on the Improvement of Terrestrial
G.;Niemeier, W., 2 - D - Networks by Additional GPS - Information.
Eichholz, K.(1985) International Federation of Surveyors (FIG). Proceedings,
Inertial, Doppler and GPS Measurements for National
and Engineering Surveys. Joint Meeting of Study
Groups 5B and 5C, July 1-3. Schriftenreihe, Heft 20-1,
München, 1985.
14. Hein, G.W.(1989) : Bestimmung Orthometrischer Höhen Durch GPS und
Schweredaten. Moderne Verfahren der Landesvermessung,
Teil I:Global Positioning System. Beiträge zum. 22.DVW-
Seminar 12-14 April 1989.
15. Koch, K.R.(1983) : Rechenverfahren bei der Einschaltung von Punkten
in ein trigonometrisches Netz. AVN, Heft 3.
16. Landau, H.(1986) : GPS Baseline Vectors in a Threedimensional Integrated
Adjustment Approach. GPS Research 1985 at the
Institute of Astronomical and Physical Geodesy.
Schriftenreihe, Hef 19, München, 1986.
17. Liddle, D.A.(1989) : Orthometric Height Determination by GPS. Surveying
and Mapping, Vol. 49, No: 1.

18. Merry, C.L.; Vanicek, P. : The Geoid and Datum Translation Components. The Canadian Surveyor, Vol. 28, No:1, March 1974.
19. Moritz, H.(1978) : The Definition of a Geodetic Datum.Proceedings of the Second International Sysposium on Problems Related to the Redefinition of the North American Geodetic Networks, April 1978.
20. Özbenli, E.(1991) : Jeodezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Genel Yayın No:154, Fakülte Yayın No:45, Trabzon.
21. Sideris, M.G.; Schwarz, K.P.(1986) : The Use of GPS and Doppler Heights in NAVD. Proceedings of the Fourth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Vol.2, Austin, Texas. April 28-May 2, 1986.
22. Sideris, M.G.(1990) : The Role of the Geoid in one-, two-, and three-dimensional Network Adjustments. Cism Journal ACSGC, Vol. 44, No:1, Spring 1990.
23. Steeves, R.R.(1984) : Mathematical Models for Use in the Readjustment of the North American Geodetic Networks. Geodetic Survey of Canada. Technical Report Number 1.April 1984.
24. Şimşek, M.(1992) : Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi. Harita Dergisi, Sayı: 108.
25. Şimşek, M. (1995) : Uydu Tekniklerinin Ağ Sıklaştırmasında Kullanılabilirliği Üzerine Bir Araştırma. Doktora Tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
26. Ulsoy, E.(1977) : Matematiksel Geodezi. İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı: 144, İstanbul.
27. Vincenty, T.(1987) : On the Use of GPS Vectors in Densification Adjusments. Surveying and Mapping, Vol.47, No:2.
28. Wolf, H.(1963) : Die Grundgleichungen der Dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. ZfV, Heft 6.
29. Wolf, H.(1975) : Ausgleichsrechnung. Formeln zur praktischen Anwendung. Ferd. Dümmlers Verlag. Bonn.