

ÜÇLÜ DAĞITIM VE OLASILIĞI (I)

Kazım Melikoğlu
Yük. Müh.

Olayları iki boyutlu düşünmektense üç veya daha çok yönlü düşünmenin hoşgörüyü artırıp insanlığın ilerlemesini etkileyeceği bir gerçektir. Bu konuda daha fazla detaya inmeden üçlü dağılımdan söz edelim. Bir torba içinde bulunan üç ayrı renkteki bilyelerden tekrarlı olmak üzere üç çekiliş yapılsa, renklerin birlikde dağılımı ve birlikte olma olasılığı şu sırada gerçekleşir. Üç kırmızı, üç sarı, üç beyazın gelme olasılığı $1/27$ olup % 3.7 dir. İki kırmızı ve bir beyaz, iki kırmızı ve bir sarı; iki beyaz ve bir kırmızı, iki beyaz ve bir sarı; iki sarı ve bir kırmızı, iki sarı ve bir beyaz gelme olasılığı $3/27$ olup % 11.1 dir. En büyük olasılık ise üç rengin birlikte gelme olasılığı olup $6/27$ ve % 22.2 dir. Üçlü dağılımın genel formülü ise $I=0,1,2,... n$ ve $J=I,...,n$ kadar olmak üzere,

$$F(Y)_{E(2j-i-n)} = \frac{n!}{(i)!(j-i)!} \cdot \frac{n-i-j}{x} \cdot Y^i Z^{j-i} 3^{-n}$$

şeklinde elde edilir.

(1) dağılımı için standard sapmalar $G(X)$ hesaplandığında örneğin $n=6$ için $G(x)=2$, (2) olarak elde edilir. (1) eşitliğinden üstel fonksiyona geçildiğinde $Y=(2\pi)^{1/2} h \cdot e^{-(E/h)^2}$ (3) bulunur. Burada h ile $G(x)$ arasındaki bağıntı $h=(Gx)^{-1} \cdot 1/2$, (4) dir. (4) eşitliğini (3) eşitliğinde yerine korsak $Y=(2\pi)^{1/2} (Gx)^{-1} e^{-1/2(E/G(x)-1/2)^2}$ (5) çıkar. (5)

eşitliğinde $E = x - \bar{x} = 0$ değeri için $Y=(2\pi)^{-1/2} (G(x))^{-1}$ (6) olup $G(x)=(2\pi)^{-1/2} Y^{-1}$ (7) dir. $n=6$ için (I) eşitliğinden bulunacak sayısal tablodan $E=0$ değerlerinin altına gelen rakamları toplar 3^{-6} ya bölüp Y^{-1} değerini 5.1712 olarak elde ederiz. Bu değer (7) eşitliğinde yerine konursa $G(x)=2.06$ (8) çıkar, Normal bölünmeden bulunacak $G(x)$ ile üçlü dağılımdan bulunan $G(x)$ arasında % 6 gibi bir fark olup normal bölünme olan (5) eşitliğinin $n=1,2,3,...n$ için $G(x)$ ini, (I) eşitliğinden yada (1) eşitliğinden X ve Z düzlemi üzerinde bulunan toplam frekanslarını, (5) eşitliğinden elde edilir. Bu neden ile (I) eşitliğini olasılık ve mühendislik çalışmalarında kullanabiliriz. (1) 1. Harita Teknik Kurultayı (1987)

ÜÇLÜ DAĞILIM VE OLASILIĞI FORMÜLÜNÜN ÇIKARILMASI:

Birbirinden bağımsız üç değişik renkte raslantı değişkeninin $1/2 (n+1)(n+2)$ (8) tane dağılım sayısı vardır. Burda n tam ve gerçek sayı olup üç rengin iadeli tekrarlanan deney sayısıdır. (8) dağılım sayısını, sütun sayısı $(2n+1)$ (9), satır sayısını $(n+1)$ (10) olacak şekilde ve sütunları gösteren $f = 2 j - i - n$ (11) eşitliğine göre yazarsak, üçlü dağılımın katsayılar tablosu ile renklerin dağılımını veren tabloyu elde ederiz. Bu dağılım $n=4$ için tablo (2) de verilmiştir.

Dağılım tablosunun birden başlayıp $2n+1$ de biten sütun sayısına göre ağırlıklı aritmetik ortalaması, satır sayısı olan $(n+1)$ 'e eşittir. $E(X) = \mu_x = n+1$ (12)

Bu dağılımın frenakları yada dağılım katsayıları $F=(i)^n (j-i)^{n-1}$ (13) eşitliği ile verilmiştir. (13) eşitliğinin toplamı 3^n 'e eşittir. Bu eşitlik tablo (2)'de gösterilmiştir. (2) dağılım tablosunu sütun sütun toplarsak, her bir deney için bulunacak sütun toplamalarının dağılımı, tablo (1) deki gibi olur.

Tablo (1) içindeki her katsayı kendi deney sayısından bir derece düşük satırda bulunan kendi, sağ ve solundaki rakamların üstünde bulunan rakamların toplamına eşittir. Bu gösterim tablo (1) de verilmiştir.

Olasılık katsayılarının toplamının bire eşit olma koşulunu gerçekleştirmek için (6) eşitliğinin her iki tarafını 3^{-n} ile çarpmak yeterlidir.

$$\sum_i F_i = \frac{n! 3^{-n}}{i! (n-j)! (j-i)!} \quad (14)$$

olur.

Renklerin birlikde dağılımını veren formül ise

$i=0,1,2,...,n$ ve $j=i,...,n$ kadar ve

W = Beyaz, Y = sarı ve K = Kırmızı olmak üzere

$H = W^{n-j} Y^i R^{j-i}$ (15) ile verilir.

Üç boyutlu uzayda bu dağılım eşkenar bir üçgen yüzey meydana getirir. Ve bu

yüzey üçgenin tabanı üç boyutlu uzayın yatay düzleminde ve tepesi ise yatay yüzeye dik eksen üzerindedir.

Bu yüzey üçgenin üzerinde bulunan frekans noktalarını ise $P = i, (j - i) (n - j)$ (16) eşitliği ile, üçlü dağılımın olasılık fonksiyonunu veren genel denklem ise

$$G(X,Y,Z)_f = (X+Y+Z)_f^n = \frac{n!}{i! (j-i)! (n-j)!} \frac{n-i}{x} \frac{j-i}{y} \frac{j-i}{z} \quad (17)$$

$$G(W,Y,R)_f = (W+Y+Z)_f^n = \frac{n! 3^{-n}}{i! (j-i)! (n-j)!} \frac{n-j}{w} \frac{j-i}{y} \frac{j-i}{r} = 1 \quad (18)$$

olarak bulunur. Şekil (1) de bu dağılım yüzeyi, üç boyutlu uzayda gösterilmiştir. Öte yandan (13) eşitliği $(X+Y+Z)^n$ açılımının katsayılarını n ci dereceden verir.

n= 4 İÇİN ÜÇ RENGİN BİRLEŞİK DAĞILIMININ GEREKLİ ELEMANLARININ BULUNMASI, SAYISAL ÇÖZÜM

$E(X)$ = Yatay eksen üzerinde = 5

$E(Y)$ = $E(Z)$ = İki dik eksen = 7/3

$VAR(X^2) = 83/3$, G_x = standard sapma = 2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$

$VAR(Y^2) = VAR(Z^2) = 19/3$, $G_y = G_z = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$

X,Y,Z üzerinde aritmetik ortalama $E(X,Y,Z)$

$E(X,Y,Z) = 53/3$

Dağılım düzlemi için $COV(X,Y,Z)$

$COV(X,Y,Z) = E(X,Y,Z) - E(X).E(Y) = 0$

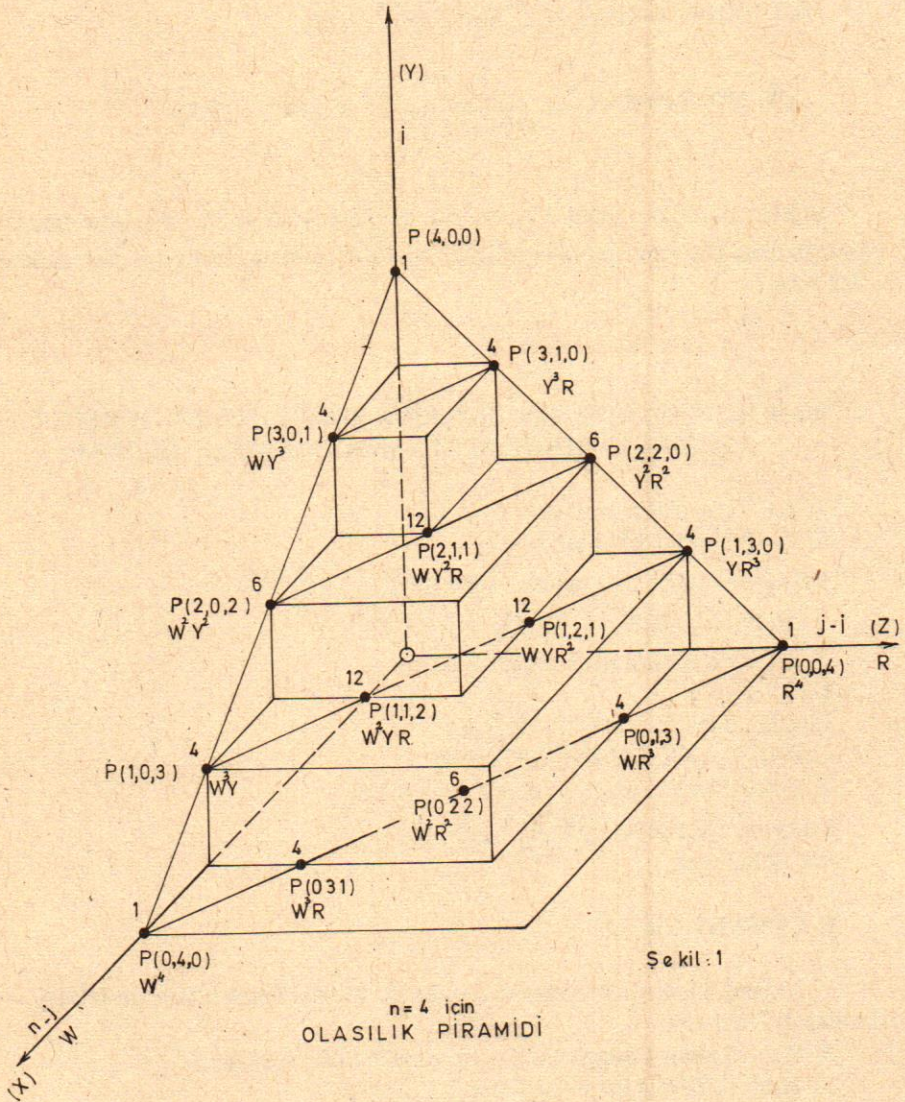
X,Y,Z üzerindeki $p_{(X,Y,Z)}$ korelasyon (ilişki)

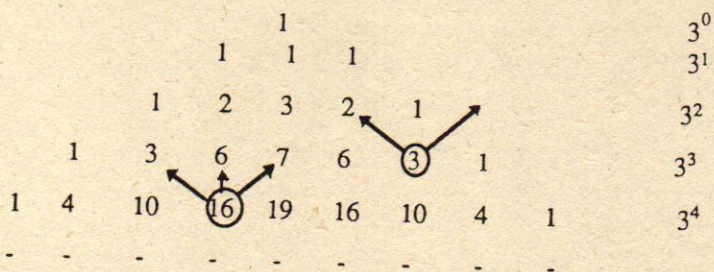
katsayısı: $(X,Y,Z) = \frac{COV(X,Y,Z)}{G_x G_y} = 0$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR

- 1) Ekrem Ulusoy, Dengeleme Hesabı En Küçük Kareler Metodu İnkilap ve Aka Basım Evi 1974.
- 2) W.Grosman Dengeleme hesabı Tercüme İTÜ Yayınları.
- 3) Köksal Bile Alaba İstatistik B.Ü. 1989.
- 4) Arıca Hüsnü İstatistik H.Ü. 1981.
- 5) Alexander M.Mood Franklin G.Graybill İstatistik teorisine Giriş Çeviri İTÜ 1973.
- 6) Seymour Lipschutz Olasılık Schoums OutlineSeries Tercüme 1979.





Tablo (1)

$$3 = 2 + 1 + 0$$

Şekil: 1 Tablo (2) $3=2+1+0$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\rightarrow$	$2n+1$
n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\rightarrow$	f
1	1		4		6		4		1		16
2		4		12		12		4			32
3			6		12		6				24
4				4		4					
5					1						1
F	1	4	10	16	19	16	10	4	1	81	$\frac{81}{3^4}$

Tablo (2)

$$\frac{1}{2} (n+1) (n+2) = 15$$

$$n+1 = 5$$

$$2n+1 = 5$$